Exercices corrigés
Equations différentielles

Exercice 1

A l'aide des séries de fourier déterminer les solutions de $y'' + y = |\cos(t)|$

On reconnait une équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants avec second membre, le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ *de sorte que les solutions maximales sont définies sur* $\mathbb{R}$ *et forment un espace affine de dimension 2 de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. La solution générale est de la forme :* $y = a\cos x + b\sin x + y_0$ *où* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* y_0 *est une solution particulière.*
Comme $f : t \mapsto f(t) = |\cos t|$ *est une fonction continue de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et* π *périodique sur* $\mathbb{R}$*, recherchons une solution particulière sous la forme d'une fonction développable en série de fourier.*
Développons $t \mapsto |\cos t|$ *en série de fourier. Comme cette fonction est* π*-périodique, continue et de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, on en déduit qu'elle est développable en série de fourier, que la série de fourier converge normalement sur* $\mathbb{R}$ *et a pour somme* $|\cos t|$ *sur* $\mathbb{R}$*.*
La fonction est paire de sorte que :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos(2nt)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)t)\,\mathrm{d}t$ *soit :*

$a_n(f) = \dfrac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$ *et par suite :*
- $\forall t \in \mathbb{R},\ |\cos t| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{4p^2-1}\cos(2pt).$

Si y *est une solution* π*-périodique de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *alors* y *et* $y'' + y$ *sont développables en série de fourier et* $y'' + y = |\cos t|$*.*

Si $a_0 + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} a_p\cos(2pt)$ *est le développement en série de fourier de* y *en intégrant par partie on montre que :*
$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p(y'') = -4p^2 a_p(y)$ *soit* $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p(y''+y) = (1-4p^2)a_p(y)$*.*
D'après l'unicité du développement en série de fourier d'une fonction π*-périodique et continue sur* $\mathbb{R}$ *on en déduit que nécessairement : le développement en série de fourier de* y *est* $\varphi(t) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{(4p^2-1)^2}\cos(2pt)$*.*

Posons $u_p(t) = \dfrac{(-1)^p}{(4p^2-1)^2}\cos(2pt)$*, on a :*
- $\forall p \in \mathbb{N},\ u_p$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$
- $\forall p \in \mathbb{N},\ |u_p(t)| \leq \dfrac{1}{(4p^2-1)^2},\ |u_p'(t)| \leq \dfrac{2p}{(4p^2-1)^2}$ *et* $|u_p''(t)| \leq \dfrac{4p^2}{(4p^2-1)^2}$

Or $\sum\limits_{p\geq 0}\dfrac{1}{(4p^2-1)^2},\ \sum\limits_{p\geq 0}\dfrac{2p}{(4p^2-1)^2},\ \sum\limits_{p\geq 0}\dfrac{4p^2}{(4p^2-1)^2}$ *sont des séries convergentes, d'où* $\sum\limits_{p\geq 0} u_p,\ \sum\limits_{p\geq 0} u_p'$ *et* $\sum\limits_{p\geq 0} u_p''$ *sont normalement convergentes, on en déduit alors que* φ *est* π*-périodique et de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$*, que* φ' *et* φ'' *s'obtiennent en dérivant la série terme à terme et l'on vérifie que* φ *est bien solution de l'équation différentielle.*
D'où la solution générale de l'équation différentielle est : $y(t) = \varphi(t) + a\cos t + b\sin t \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{(4p^2-1)^2}\cos(2pt)$

Exercice 2 On considère l'équation différentielle : $4(x^2+1)y'' + 12xy' + 3y = 0$

1. **Déterminer toutes les solutions développables en série entière au voisinage de 0 et en déduire toutes les solutions sur l'intervalle** $]-1,1[$**.**
2. **On pose** $u(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)\mathrm{d}t$ **,** $v(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)\mathrm{d}t$ **et** $z = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t(1-ix)}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$**. Montrer que** $z = u + iv$ **et que** z **est solution de l'équation différentielle du premier ordre :** $-2(x+i)z' = z$
3. **Montrer que** u **et** v **sont solutions de l'équation du second ordre.**
En déduire que u et v sont développables en séries entières.

1. *Soit* $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergence* R*. Sur* $]-R,R[$ *on a*

$4(x^2+1)y'' + 12xy' + 3y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(4(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n+1)(2n+3)a_n)x^n$ *et une série entière est nulle sur son* *intervalle de convergence si et seulement si ses cœfficients sont suls de sorte que* $(]R,R[,y)$ *est solution de l'équation différentielle si et seulement si* $\begin{cases} R>0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=-\dfrac{(2n+1)(2n+3)}{4(n+2)(n+1)}a_n \end{cases}$

On en déduit par récurrence : $\forall p\in\mathbb{N}$ $\begin{cases} a_{2p} &=& (-1)^p\dfrac{(4p)!}{4^{2p}(2p)!^2}a_0 \\ a_{2p+1} &=& (-1)^p\dfrac{(4p+2)!}{4^{2p}(2p+1)!^2}\dfrac{a_1}{2} \end{cases}$

Posons : $\varphi_0(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^p\dfrac{(4p)!}{4^{2p}(2p)!^2}x^{2p}$ *et* $\varphi_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^p\dfrac{(4p+1)!}{4^{2p}(2p+1)!^2}x^{2p}$,

φ_0 *et* φ_1 *sont les sommes de deux séries entières de rayon de convergence R=1 (*$R>0$*),* φ_0 *est paire et* φ_1 *est impaire. Les solutions de l'équation différentielle développables en séries entières sont donc les fonctions* $\varphi(x)=a\varphi_0(x)+b\varphi_1(x)$ *où* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *elles ont un rayon de convergence supérieur ou égal à* $1>0$ *, comme* $a\varphi_0$ *est la somme des termes de rang pair et* $b\varphi_1$ *est la somme de termes de rang impair* $(a_nx^n)_n$ *est bornée pour* $x<1$ *et non borné pour* $x>1$*, le rayon de convergence est R=1.*

Sur $]-1,+1[$ *l'ensemble des solutions développables en séries entières est donc un espace vectoriel de dimension deux.*

Comme l'équation différentielle est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 dont les cœfficients sont continus sur $\mathbb{R}$ *et que le cœfficient de* y'' *ne s'annule pas, les solutions maximales sont définies sur* $\mathbb{R}$ *et forment un espace vectoriel de dimension 2, de sorte que l'ensemble des solutions sur* $]-1,1[$ *forment un espace vectoriel de dimension deux, par suite toutes les solutions maximales de l'équation différentielles sont développables en série entière au voisinage de 0 sur l'intervalle* $]-1,1[$.

Sur $]-1,+1[$ *ces fonctions coïncident avec les fonctions :* $\varphi(x)=a\varphi_0(x)+b\varphi_1(x)$ *où* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

2. *Posons pour* $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $f(x,t)=\dfrac{e^{-t(1-ix)}}{\sqrt{t}}$*, on a :*

• f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

De sorte que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ *est continue sur* $]0,+\infty[$ *et pour tout* $t\in]0,+\infty[$, $x\mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

• $|f(x,t)|=\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ *avec* $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$ *et :*

– *en* 0 : $0\le\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\le\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ *avec* $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\in\mathcal{L}^1(]0,1])$ *donc* $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\in\mathcal{L}^1(]0,1])$

– *en* $+\infty$: $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}=o(e^{-t})$ *avec* $e^{-t}\in\mathcal{L}^1([1,+\infty[)$ *donc* $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\in\mathcal{L}^1([1,+\infty[)$.

– *Par suite* $\forall x\in\mathbb{R},\ t\mapsto f(x,t)\in\mathcal{L}^1(]0,+\infty[)$.

• $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue sur* $]0,+\infty[$ *et* $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *et continue sur* $\mathbb{R}$

• *D'autre part* $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=i\sqrt{t}e^{-t(1-ix)}$ *soit* $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)|=\sqrt{t}e^{-t}$ *avec* $t\mapsto\sqrt{t}e^{-t}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$ *et en* $+\infty$, $\sqrt{t}e^{-t}=o(\dfrac{1}{t^2})$ *avec* $\dfrac{1}{t^2}\in\mathcal{L}^1[1,+\infty[$ *par suite* $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)|\le\sqrt{t}e^{-t}$ *avec* $\sqrt{t}e^{-t}\in\mathcal{L}^1[0,+\infty[$ *(hypothèse de domination).*

On en déduit que $x\mapsto z(x)$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et par suite les réelles et imaginaires de* z *sont définies et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $z=u+iv$.

$z'(x)=\int_0^{+\infty}i\sqrt{t}e^{-t(1-ix)}\mathrm{d}t$ *En intégrant par parties il vient* $\int_0^{+\infty}i\sqrt{t}e^{-t(1-ix)}\mathrm{d}t=\left[\dfrac{i\sqrt{t}}{-1+ix}e^{-t(1-ix)}\right]_0^{+\infty}+\dfrac{1}{1-ix}\int_0^{+\infty}\dfrac{i}{2\sqrt{t}}e^{-t(1-ix)}\mathrm{d}t$*, on en déduit* $-2(x+i)z'=z$.

3. *Comme* (1) : $-2(x+i)z'=z$*, on en déduit que* z *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *(par récurrence on peut en déduire aussi que* z *est* $\mathcal{C}^\infty$*)*

En dérivant la relation (1) *et en utilisant la relation* (1) *elle-même la fonction* z *vérifie aussi :*

$$\begin{array}{rcl} -2z'-2(x+i)z'' &=& z' \\ -2(x+i)z'' &=& 3z' \\ -2(x^2+1)z'' &=& 3(x-i)z' \\ 4(x^2+1)z''+6(x-i)z' &=& 0 \\ 4(x^2+1)z''+6(x-i)z'+6(x+i)z'+3z &=& 0 \\ 4(x^2+1)z''+12xz'+3z &=& 0 \end{array}$$

De sorte que z *est solution de l'équation différentielle initiale comme elle est à cœfficients réels, on en déduit que* $u=\mathrm{Re}z$ *et* $v=\mathrm{Im}z$ *sont aussi solutions de l'équation. comme d'après la première question toutes les solutions sont développables en série entière sur* $]-1,1[$*, on en déduit que* u *et* v *sont développables en série entière sur* $]-1,+1[$.