Feuille d'exercices

—

Espaces euclidiens et préhilbertiens

Espaces euclidiens

Exercice 1

On considère $E = \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ *et pour* $(A, B) \in E^2$ *on pose* $< A, B >= tr({}^tAB)$ *et* $\phi(A) = {}^tA$.

1. *Montrer que* $< , >$ *est un produit scalaire sur* E
2. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de* ϕ

Exercice 2

Soit $(P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{R}^3[X]$, $E = \mathbb{R}^3$, *pour* $(x, y, z) \in E$ *on pose* $q(x, y, z) = \int_0^1 (xP_1(t) + yP_2(t) + zP_3(t))\mathtt{dt}$.

1. *Déterminer en fonction de* P_1, P_2, P_3 *la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *de la forme blinéaire* ϕ *associée à* q. *A quelle condition* ϕ *est-elle un produit scalaire ?*
2. *Si* $P_1(t) = 1$, $P_2(t) = t$, $P_3(t) = t^2$ *déterminer une base orthonormée pour* ϕ.

Exercice 3

Soit $a \neq 0, a \in E$, *pour* $x \in E$ *on pose* $\varphi(x) = x - \dfrac{< a, x >}{< a, a >}a$. *Quelle est la nature de* φ *? Exprimer de la même façon la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle* D_a.

Exercice 4

Soit $(E, < , >)$ *est espace euclidien et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $\forall x \in E$, $\| u(x) \| \leq \| x \|$.
Montrer que $E = \ker(u - Id) \overset{\perp}{\oplus} \mathtt{Im}(u - Id)$

Espace préhilbertiens

Exercice 5 *On considère* $E = \mathbb{R}[X]$ *et pour* $(P, Q) \in E^2$ *on pose* $< P, Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\mathtt{dt}$

1. *Montrer que* $(E, < , >)$ *est espace préhilbertien réel.*
2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *montrer qu'il existe un polynôme* T_n *de degré* n *tel que* $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$
3. *Montrer que* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base orthogonale de* E

Exercice 6

$E = \mathbb{R}[X]$ *et* $< P, Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathtt{dt}$, *pour* $n \in \mathbb{N}$ *on considère* $L_n(X) = \dfrac{\mathtt{d}^n}{\mathtt{d}x^n}(1 - x^2)^n$.
Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base orthogonale de* E