Feuille d'exercices

—

Equations différentielles
Courbes intégrales

Exercice 1 *Résoudre et représenter la courbe intégrale du système :* $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ (x(0), y(0)) = (2, 0) \end{cases}$

Exercice 2
Etudier l'existence, l'unicité de solutions maximales et résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\begin{cases} y' = sin(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ *avec* $y_0 \in \mathbb{R}$
2. $\begin{cases} (x^2 - 1)y' - 6xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4ty'^2 = y^2 - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y' = \dfrac{2y^2 + t^2}{ty} \\ (t, y) \in]0, +\infty[\end{cases}$

Exercice 3
Soit $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$ *une équation différentielle avec* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *et* (I, φ) *une solution maximale. On suppose que* $b = \sup(I) \in \mathbb{R}$. *Montrer que* φ *n'a pas de limite finie en* b.

Exercice 4 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' + \dfrac{x}{1 + x^2} y = \dfrac{1}{2x(1 + x^2)}$
2. $2xy' + y = \dfrac{1}{1 - x}$
3. $(x + 2y)y' = 1$
4. $y' + 2xy + xy^4 = 0$
5. $y' - \dfrac{1}{3} y = \dfrac{1}{3}(1 - 2x)y^4$
6. $xy' - y = y^2 - x^2$
7. $(x^2 + y^2)y' + 2xy = 0$

Exercice 5 *On considère les courbes* (Γ_C) *d'équation :* $y^2 = Ce^x + x + 1$, $C \in \mathbb{R}$

1. *Représenter* (Γ_C)
2. *Déterminer les trajectoires orthogonales à* (Γ_C).

Exercice 6

1. *Résoudre :* $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$
2. *Montrer que la solution singulière est l'enveloppe de la solution générale.*

Exercice 7 *Déterminer les fonctions affines solutions de* $y = xy'^2 - 2y'^3$ *puis résoudre :* $\begin{cases} y = xy'^2 - 2y'^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 8 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, q_1, q_2 *2 fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *de* I *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que* $\forall t \in I,\ q_2(t) \geq q_1(t)$. *soit* u *une solution de* $y'' + q_1 y = 0$ *et* v *une solution de* $y'' + q_2 y = 0$. *On suppose de plus qu'il existe* $\alpha < \beta$ *tels que* $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ *et* $u(t) \neq 0,\ \forall t \in]\alpha, \beta[$. *Montrer que* v *admet un zéro dans* $]\alpha, \beta[$.