Feuille d'exercices

—

Equations différentielles
solutions développables en série entière

—

Exercice 1

Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 des équations différentielles suivantes :

1. $x^2y" + x(1+x)y' - 4y = 0$
2. $x^2y" - 2xy' + (x^2+2)y = 0$

Solution 1

Soit $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergence* R*, on a :*

$$x^2y" = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$$
$$xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$
$$x^2y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^n$$
$$-4y = \sum_{n=0}^{+\infty} -4a_n x^n$$

De sorte que :

$$x^2y" + x(1+x)y' - 4y = -4a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n(n-1)a_n + na_n + (n-1)a_{n-1} - 4a_n)x^n$$
$$x^2y" + x(1+x)y' - 4y = -4a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n^2-4)a_n + (n-1)a_{n-1})x^n$$

Une série entière est nulle si et seulement si ses cœfficients sont nuls, soit y *est solution de l'équation différentielle si et seulement si :*
$R > 0$
$a_0 = 0$
$\forall n \geq 1 \quad (n^2-4)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0$
soit si et seulement si :
$a_0 = 0$
Pour $n = 1, \quad -3a_1 = 0$
Pour $n = 2, \quad a_1 = 0$

$\forall n \geq 3\ a_n - \dfrac{n-1}{(n-2)(n+2)} a_{n-1}$

On observe bien la formule de récurrence et on l'applique une, deux ou trois fois pour voir : pour deux fois on a :

$a_n = (-1)^2 \dfrac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n-2)(n+1)(n-3)} a_{n-2} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)(n-2)(n-3)} a_{n-2}$

ce qui suggère la formule de récurrence :

$a_n = (-1)^n \dfrac{(n-1)!4!}{(n-2)!(n+2)!} a_2 = (-1)^n \dfrac{24(n-1)}{(n+2)!} a_2$ *que l'on obtient en simplifiant les factorielles. On démontre alors cette formule par récurrence pour $n \geq 2$. Les solutions développables en série entière sont de la forme :*

$y = 24a_2 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{(n+2)!} x^n = \lambda \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{(n+2)!} x^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$, *le rayon de convergence de cette série est*

$R = +\infty > 0$, *c'est bien une solution et l'ensemble des solutions développables en série entière au voisinage de 0 est un espace vectoriel de dimension 1 (note : on peut exprimer la somme de la série à l'aide de* $\exp(x)$ *et de fonctions polynômes).*

Solution 2

On raisonne de même avec la seconde équation et on trouve :
pour $n = 0,\ a_0 = 0,\ n = 1,\ -2a_1 + 2a_1 = 0,\ n \geq 2,\ (n-1)(n-2)a_n + a_{n-2} = 0$ *pour* $n = 2$ *on retrouve* $a_0 = 0$ *et* $\forall n \geq 3,\ a_n = -\dfrac{1}{(n-1)(n-2)} a_{n-2}$

Comme la récurrence lie les termes de deux en deux on sépare les termes de rang pair et de rang impair et on raisonne comme précédemment on applique la formule deux ou trois fois on observe bien, éventuellement on exprime les premiers termes $a_3,\ a_4,\ a_5$*... on déduit les formules indiquées et on les montre par récurrence :*

$\forall p \geq 1,\ a_{2p} = \dfrac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)!} a_2$ *et* $\forall p \geq 0,\ a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p}{(2p)!} a_1$ *soit*

$y = a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p+1} + a_2 \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)!} x^{2p} = a_1 x \cos x + a_2 x \sin x$. *Le rayon de convergence des solutions est $+\infty$ et l'ensemble des solutions développables en série entière au voisinage de 0 est un espace vectoriel de dimension 2.*