EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

—

C. Susset

—

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide de quelques résultats à connaître sur les équations et systèmes différentiels linéaires scalaires (les fonctions inconnues sont des fonctions numériques de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Equation différentielles linéaires scalaires

1.1 Equation du premier ordre

Soit a et b deux fonctions numériques continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on s'intéresse à l'équation différentielle : $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ où y est une fonction inconnue dérivable.

1.1.1 Généralités

Définition 1 *On appelle solution de (E) tout couple (J, φ) où $J \subset I$ et φ est une fonction définie et dérivable sur J telle que $\forall t \in J,\ \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$.*

Définition 2 *Une solution (J, φ) de (E) est une solution maximale si et seulement si pour toute solution (K, ψ) telle que $J \subset K$ et $\psi_{|_J} = \varphi$ on a $K = J$.*

Proposition 1 *Si (J, φ) est une solution maximale de (E) alors $J = I$.*

Dans la suite on s'intéressera aux solutions maximales de (E) et on identifiera une solution maximale avec la fonction correspondante définie sur I.

Définition 3 *On appelle équation différentielle linéaire homogène du premier ordre ou équation différentielle linéaire du premier ordre sans second menbre une équation du type $(E_H) : y' = a(t)y$.*

A l'équation $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ on associe l'équation homogène $(E_H) : y' = a(t)y$

Proposition 2 *L'ensemble des solutions $\overrightarrow{S}$ de (E_H) est un sous-espace vectoriel de dimension 1 du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Proposition 3 *Pour $t_0 \in I$ l'application* $\begin{array}{ccc} \overrightarrow{S} & \to & \mathbb{K} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(t_0) \end{array}$ *est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ espace vectoriel*

Proposition 4 *L'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine S de dimension 1 du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ de direction l'espace vectoriel $\overrightarrow{S}$ des solutions de l'équation homogène associée (E_H).*

Remarque 1 *Si a, b sont de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ (resp. $p = +\infty$) sur I alors les solutions de (E_H) et de (E) sont de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, (resp. $\mathcal{C}^\infty$ si $p = +\infty$)*

D'une manière générale on appelle problème de Cauchy une équation différentielle normalisée avec une condition initiale. Ici pour $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ l'équation : $\left\{\begin{array}{l} y' = a(t)y + b(t) \\ (t, y) \in I \times \mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right.$ est un problème de Cauchy

Proposition 5 *Le problème de Cauchy :* $\left\{\begin{array}{l} y' = a(t)y + b(t) \\ (t, y) \in \times\mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right.$ *possède une unique solution définie sur I.*

1.1.2 Résolution

D'une manière générale on résout d'abord l'équation homogène (E_H) et ensuite on résout l'équation (E) de la manière suivante :

1.1.3 Equation (E_H)

Proposition 6 *Si A est une primitive de a sur I alors* $\overrightarrow{S} = \{\varphi,\ \forall t \in I\ \varphi(t) = ce^{A(t)},\ c \in \mathbb{K}\}$

1.1.4 Equation (E)

méthode 1 :

Si on connait une solution y_1 de (E) (y_1 est appelée une solution particulière) alors $S = y_1 + \overrightarrow{S}$.

méthode 2 :

C'est la méthode dite de "variation de la constante". On recherche les solutions sous la forme $y = ze^{A(t)}$ où z est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. z est alors solution de l'équation : $z'e^{A(t)} = b(t)$ de sorte que si ϕ est une primitive de $b(t)e^{-A(t)}$ alors $S = \{ce^{A(t)} + \phi(t)e^{A(t)},\ c \in \mathbb{K}\} = y_1 + \overrightarrow{S}$ où $y_1(t) = \phi(t)e^{A(t)}$ est une solution particulière de (E).

1.2 Equation du second ordre

Soit a, b et c trois fonctions numériques continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on s'intéresse à l'équation différentielle : $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ où y est une fonction inconnue deux fois dérivable.

1.2.1 Généralités

Comme précédemment on définit les solutions et les solutions maximales de (E) et on associe à (E) l'équation homogène $(E_H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Proposition 7 *Si (J, φ) est une solution maximale de (E) alors $J = I$.*

comme précédemment on s'intéressera aux solutions maximales de (E) et on identifiera une solution maximale avec la fonction correspondante définie sur I.

Proposition 8 *L'ensemble des solutions $\overrightarrow{S}$ de (E_H) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Proposition 9 *Pour $t_0 \in I$ l'application* $\begin{array}{ccc} \overrightarrow{S} & \to & \mathbb{K}^2 \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \end{array}$ *est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ espace vectoriel*

Proposition 10 *L'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine S de dimension 2 du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ de direction l'espace vectoriel $\overrightarrow{S}$ des solutions de l'équation homogène associée (E_H).*

Remarque 2 *Si a, b, c sont de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ (resp. $p = +\infty$) sur I alors les solutions de (E_H) et de (E) sont de classe $\mathcal{C}^{p+2}$, (resp. $\mathcal{C}^\infty$ si $p = +\infty$)*

Ici pour $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K}^2$ l'équation : $\left\{\begin{array}{l} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ (t, y) \in I \times \mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1 \end{array}\right.$ est un problème de Cauchy

Proposition 11 *Le problème de Cauchy :* $\left\{\begin{array}{l} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ (t, y) \in \times\mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0\ y'(t_0) = y_1 \end{array}\right.$ *possède une unique solution définie sur I.*

1.2.2 Résolution

D'une manière générale on résout d'abord l'équation homogène (E_H) et ensuite on résout l'équation (E)

1.2.3 Equation (E_H)

Lorsque les fonctions a, b ne sont pas constantes, il n'existe pas comme pour les équations du premier ordre de méthode générale pour déterminer $\vec{S}$. On cherche deux solutions y_1, y_2 linéairement indépendantes, pour cela on les cherche en s'inspirant des coefficients a, b et des fonctions classiques (polynômes, fonctions rationnelles, exponentielles, logarithmes, trigonométriques etc...). On peut aussi chercher les solutions sous forme de somme de série entière ou de série de fourier, par changement de variable ou de fonction inconnue on peut essayer de se ramener à une équation plus simple, du premier ordre par exemple. On sait résoudre l'équation lorsque a et b sont constantes ou lorsque l'on connait une solution qui ne s'annule pas sur I (voir les paragraphes suivants). Ne pas oublier le résultat :

Proposition 12 *Soit* $t_0 \in I$ *et* $(y_1, y_2) \in \vec{S}^2$. (y_1, y_2) *est une base de* $\vec{S}$ *si et seulement si* $((y_1(t_0), y_1'(t_0)), (y_2(t_0), y_2'(t_0)))$ *est une base de* $\mathbb{K}^2$

Définition 4 *Soit* $(y_1, y_2) \in \vec{S}^2$, *on appelle matrice wronskienne de* (y_1, y_2) *en* $t \in I$ *la matrice* $W(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$ *et on appelle wronskien* $w(t) = \det W(t)$

Proposition 13 *Soit* $(y_1, y_2) \in \vec{S}^2$, (y_1, y_2) *est une base de* $\vec{S}$ *si et seulement si* $\exists t_0 \in I$ *tel que* $w(t_0) \neq 0$ *dans ces conditions* $\forall t \in I$, $w(t) \neq 0$ *et* $W(t)$ *est inversible.*

Proposition 14 *Soit* (y_1, y_2) *une base de* $\vec{S}$, *on a :*
$\vec{S} = \{\lambda y_1 + \mu y_2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \{y = W(t)C,\ avec\ C = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$

1.2.4 Equation (E)

méthode 1 :
Si on connait une solution y_0 de (E) (y_0 est appelée une solution particulière) alors $S = y_0 + \vec{S}$ si (y_1, y_2) est une base de $\vec{S}$ alors $S = \{y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$.

méthode 2 :
C'est la méthode dite de "variation des constantes". On recherche les solutions sous la forme $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ où (y_1, y_2) est une base de $\vec{S}$ et λ, μ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. y est alors solution de (E) si et seulement si (λ, μ) est solution du système : $\left\{\begin{array}{lcl} \lambda' y_1 + \mu' y_2 & = & 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' & = & c \end{array}\right.$.

1.2.5 Equation homogène à coefficients constants

On s'intéresse à l'équation $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle, l'équation dans $\mathbb{C}$: $x^2 + ax + b = 0$
soit (r_1, r_2) les deux racines dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

1. Solutions complexes :
   (a) Si $r_1 \neq r_2$ alors $\vec{S} = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$
   (b) Si $r_1 = r_2$ alors $\vec{S} = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu t e^{r_1 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$
2. Solutions réelles avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
   (a) Si $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$, $r_1 \neq r_2$ alors $\vec{S} = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
   (b) Si $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$, $r_1 = r_2$ alors $\vec{S} = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu t e^{r_1 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
   (c) Si $(r_1, r_2) \in \mathbb{C}^2$, $r_2 = \bar{r}_1$, $r_1 = \alpha + i\beta$ alors $\vec{S} = \{\lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

1.2.6 Cas ou on connait une solution qui ne s'annule pas

Si u est une solution de (E) ou de (E_H) qui ne s'annule pas sur I, on cherche alors les solutions de (E) sous la forme $y = zu$, y est solution de (E) sur I si et seulement si z' est solution d'une équation linéaire du premier ordre.

2 Systèmes différentiels à coefficients constants

2.1 Généralités

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ (espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ un vecteur de n fonctions numériques inconnues de classe $\mathcal{C}^1$.

On s'intéresse au système différentiel :

$$(E) \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\text{(E)} \begin{cases} X' = AX + B(t) \\ (t, X) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

et on considère le système homogène associé :

$$(E_H) \begin{cases} X' = AX \\ (t, X) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

Théorème 1 *Les solutions maximales de (E_H) et de (E) sont définies sur I*

Théorème 2 *L'ensemble des solutions $\overrightarrow{S}$ de (E_H) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.*

Proposition 15 *Pour $t_0 \in I$ l'application* $\begin{array}{ccc} \overrightarrow{S} & \to & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \to & \varphi(t_0) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Théorème 3 *L'ensemble des solutions S de (E) est un $\mathbb{K}$ espace affine de dimension n de direction l'espace vectoriel des solutions de (E_H).*

Proposition 16
Pour $(t_0, C_0) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
Le problème de Cauchy : $\begin{cases} X' = AX + B(t) \\ (t, X) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X(t_0) = C_0 \end{cases}$ *possède une unique solution définie sur I.*

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ n solutions de (E_H) et X_0 une solution particulière de (E).

Définition 5 *On appelle matrice wronskienne du système de solutions $(X_1, \cdots, X_n)$ la matrice $W(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui a pour vecteurs colonnes les vecteurs X_j, $j = 1, \cdots, n$ et on appelle wronskien du système de solutions $(X_1, \cdots, X_n)$ $w(t) = \det(W(t))$.*

Proposition 17 *Le système de solutions $(X_1, \cdots, X_n)$ de (E_H) est une base de $\overrightarrow{S}$ si et seulement si $\exists t_0 \in I$, $w(t_0) \neq 0$, on a alors $\forall t \in I$, $w(t) \neq 0$*

Proposition 18 *L'ensemble des solutions de (E) est un espace affine de dimension n de direction $\overrightarrow{S}$et on a $S = X_0 + \overrightarrow{S}$.*

Proposition 19 *Si T est semblable à A avec $T = P^{-1}AP$, P étant la matrice de changement de base, posons $X = PY$ et $B = PB_1$, on a X est solution de (E) si et seulement si Y est solution de* $\begin{cases} Y' = TY + B_1(t) \\ (t, Y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}$

Ceci permet de résoudre aisément le système lorsque A est diagonalisable ou trigonalisable c'est à dire lorsque T est diagonale ou triangulaire.

2.2 résolution

2.2.1 Cas ou A est diagonalisable

Théorème 4
Si A est diagonalisable et $(V_1, \cdots, V_n)$ est une base de vecteurs propres avec $AV_j = \lambda_j V_j$, posons alors $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} V_j$ pour $j = 1, \cdots, n$, on a $(\varphi_j)_{1 \le j \le n}$ est une base de $\overrightarrow{S}$, soit $\overrightarrow{S} = \{\varphi,\ \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_j \varphi_j(t),\ (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{K}^n\}$

2.2.2 Cas ou A est trigonalisable

Par changement de variable on se ramène à un système triangulaire de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & a_{11}x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n-1}x_{n-1} + b_2(t) \\ \vdots & & \\ x_{n-1}' & = & a_{n-11}x_1 + a_{n-12}x_2 + b_{n-1}(t) \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + b_n(t) \end{array}\right.$$

Le système se résout de proche en proche en commençant par la dernière équation et en reportant la solution dans l'avant dernière équation ainsi de suite, on est amené à résoudre une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre avec second menbre à chasue étape.