Problème
sur
la fonction Gamma

—

Pour $x \geq 0$ on pose $F(x) = \int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ et $\Gamma(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-t} t^{x-1} dt$. On rappelle que Γ est la fonction Gamma et qu'elle est définie sur $]0, +\infty[$.

0.0.1 Partie I

1. Justifier l'existence et calculer $\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2} dt$
2. Montrer que F est définie sur $[0, +\infty[$
3. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$
4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer $F'(x)$.
5. Soit $x > 0$,effectuer le changement de variable $u = xt^2$ dans $\int_{(0,+\infty[} e^{-xt^2} dt$.
   Exprimer $\int_{[0,+\infty[} e^{-xt^2} dt$ à l'aide de $\Gamma(\frac{1}{2})$
6. Pour $x \in]0, +\infty[$ exprimer $F'(x) - F(x)$ en fonction de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

0.0.2 Partie II

1. On pose $H(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. Montrer que H est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer $H'(x)$
2. On pose $G(x) = \int_{[x,+\infty[} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$, montrer que $\lim_{x->+\infty} G(x) = 0$

0.0.3 Partie III

1. Résoudre en utilisant la fonction G de la partie II : $y' - y = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2\sqrt{x}} \quad y \in C^1(]0, +\infty[)$
2. Montrer que $\lim_{x->+\infty} e^{-x} F(x) = 0$. Exprimer alors $F(x)$ à l'aide de $G(x)$ et de $\Gamma(\frac{1}{2})$
3. Montrer que $F(0) = \frac{1}{2}[\Gamma(\frac{1}{2})]^2$. En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.