# Feuille d'exercices
—
# Exemples de Transformée de Fourier et de Laplace
—

## Exercice 1

*On rappelle que :* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ *On pose* $T(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-itx}dt$ *($T$ est la transformée de fourier de la fonction* $f(t) = e^{-t^2}$*)*

1. *Montrer que* $T$ *est définie sur* $\mathbb{R}$
2. *Montrer que* $T$ *est continue sur* $\mathbb{R}$
3. *Montrer que* $T$ *est de classe* $C^1$ *puis de classe* $C^\infty$*sur* $\mathbb{R}$*.*
4. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $T'(x) + \frac{x}{2}T(x) = 0$*.*
5. *Déterminer* $T(x)$ *puis* $\lim\limits_{x\to+\infty} T(x)$

## Exercice 2

*Soit* $f$ *une fonction continue et intégrable sur* $]-\infty, +\infty[$*.*
*On pose* $Tf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$ *(Transformée de fourier de* $f$*)*

1. *Montrer que* $Tf$ *est définie sur* $\mathbb{R}$
2. *Montrer que* $Tf$ *est continue sur* $\mathbb{R}$
3. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $F_n(x) = \int_0^n f(t)e^{-itx}dt$*.*
   *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = 0$ *(on pourra montrer ce résultat d'abord pour les polynômes à l'aide d'une intégration par parties puis pour* $f$ *)*
4. *Montrer que la suite* $(F_n)_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *et déterminer sa limite.*
5. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} Tf(x) = 0$

## Exercice 3

*Soit* $f$ *une fonction continue et intégrable sur* $[0, +\infty[$*.*
*On pose* $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx}dt$ *(Transformée de laplace de* $f$*)*

1. *Montrer que* $Lf$ *est définie et continue sur* $[0, +\infty[$
2. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* $[0, +\infty[$ *de limite* $+\infty$ *lorsque* $n$ *tend vers* $+\infty$*, à l'aide du théorème de convergence dominée montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} Lf(x_n) = 0$*. En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$*.*
3. *Montrer que* $Lf$ *est* $C^\infty$ *sur* $]0, +\infty[$ *et donner une expression de* $Lf^{(p)}(x)$

## Exercice 4

*On pose* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} e^{-xt}\mathtt{dt}$

1. *Montrer que* $F$ *est définie et continue sur* $[0, +\infty[$*.*
2. *Montrer que* $F$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $]0, +\infty[$*, calculer* $F''(x)$ *pour* $x > 0$ *et en déduire F(x) pour* $x \geq 0$
3. *Déterminer la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathtt{dt}$ *puis celle de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathtt{dt}$