Feuille d'exercices
—
Intégrales avec paramètres
—

Intégrales avec paramètre sur un segment

Exercice 1

Soit g une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on pose pour $x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x |t-x|g(t)\mathtt{dt}$.
Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et exprimer $F'(x)$ en fonction de g.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$, on pose pour $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathtt{dt}$ et $F(0) = f(0)$.

1. *A l'aide d'un changement de variable exprimer $F(x)$ comme intégrale avec paramètre sur le segment $[0,1]$.*
2. *Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0)$.*

Exercice 3

$F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x t\mathtt{dt}$. *Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$*

Exercice 4

On pose $J_0(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin t)\mathtt{dt}$ *(J_0 est une fonction de Bessel).*

1. *Montrer que J_0 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que J_0 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy" + y' + xy = 0$.*
3. *Montrer que J_0 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en 0.*

Intégrales avec paramètre sur un intervalle quelconque

Exercice 5

$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathtt{dt}$.

1. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, exprimer $f'(x)$.*
2. *Montrer que f est solution d'une équation fifférentielle linéaire du premier ordre, en déduire f.*
   (on pourra intégrer par partie et on admettra que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\mathtt{dt} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$*).*

Exercice 6

$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathtt{dt}$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et est solution sur cet intervalle d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

Exercice 7 *(fonction Gamma)*

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathtt{dt}$. *Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.*