MESURE et INTEGRATION

Thierry Gallouët Raphaèle Herbin

May 14, 2002

Contents

Chapter 1

Motivation et objectifs

Nous commençons par donner ici un aperçu des motivations de la théorie de l'intégration, en montrant d'abord les limitations de l'intégrale de Riemann.

1.1 Intégrale de Riemann

Nous présentons ici quelques rappels sur l'intégrale des fonctions continues, et plus généralement sur l'intégrale de Riemann. Nous montrons pourquoi la théorie de l'intégrale de Riemann est insuffisante pour la suite.
Nous nous limitons à l'étude des fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous allons tout d'abord définir l'intégrale des fonctions réglées (on appelle fonction réglée une fonction qui est limite uniforme d'une suite de fonctions "en escalier"). La définition de l'intégrale des fonctions réglées (comme celle de l'intégrale de Riemann, qui sera rappelée plus loin, et celle de l'intégrale de Lebesgue) peut être vue en 3 étapes, qui, ici, s'écrivent :

1. *mesurer les intervalles de* $[0,1]$. Pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, on pose $m([\beta,\alpha]) = \beta - \alpha$.
2. *intégrer les fonctions en escalier.* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction en escalier. Ceci signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, une famille $(\alpha_i)_{i\in\{0,\ldots,p\}}$, avec : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, pour tout $i \in \{0,\ldots,p-1\}$ et $\alpha_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,p-1\}}$ avec $a_i \neq a_{i+1}$, pour tout $i \in \{0,\ldots,p-2\}$ (si $p > 1$), tels que :
$$f(x) = a_i, \quad \forall x \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[, \quad \forall i \in \{0,\ldots,p-1\}. \tag{1.1}$$
On pose alors :
$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i m([\alpha_i, \alpha_{i+1}]). \tag{1.2}$$
3. *"passer à la limite".* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction réglée, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. On pose :
$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx. \tag{1.3}$$

On peut montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$). On pose :

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} I_n. \tag{1.4}$$

(En montrant que cette définition ne dépend que de f, et pas du choix de la suite $(f_n)_n$.)

On note E l'ensemble des fonctions réglées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On a ainsi défini $\int_0^1 f(x)dx$ pour tout $f \in E$ (noter que $E \supset C([0,1],\mathbb{R})$). Pour $f \in E$ on pose (en remarquant que $|f| \in E$ et $f^2 \in E$:

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|dx, \tag{1.5}$$

$$N_2(f) = \big(\int_0^1 (f(x))^2 dx\big)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.6}$$

Les applications N_1 et N_2 sont des semi-normes sur E ; malheureusement l'espace E, muni de la semi-norme N_1 (ou de la semi norme N_2), n'est pas vraiment intéressant en pratique, en particulier parce dans cet espace, et pour cette semi-norme, une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente. On peut également remarquer que l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (sur lequel N_1 et N_2 sont des normes), muni de la norme N_1 (ou de la norme N_2), n'est pas un espace de Banach, ce qui le rend peu intéressant. En fait l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est intéressant lorsqu'il est muni de la norme dite "norme du sup" (avec laquelle il est complet). On peut généraliser la définition de l'intégrale ci-dessus en améliorant un peu l'étape 3 ci-dessus (passage à la limite), cette généralisation se fait en introduisant les "sommes de Darboux" (alors que l'intégrale des fonctions continues peut être définie en utilisant seulement les "sommes de Riemann"). On obtient ainsi la définition de l'intégrale des fonctions dites "Riemann-intégrables". En fait cette généralisation est assez peu intéressante, et les inconvénients sont les mêmes que pour l'intégrale des fonctions réglées. Un autre inconvénient important de la théorie de l'intégration exposée ci-dessus est la médiocrité des théorèmes de convergence pour cette théorie. A vrai dire, le seul théorème facile est le théorème suivant : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, et $f \in E$. On a alors :

$$f_n \to f \text{ uniformément quand } n \to \infty \Rightarrow \int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \text{ quand } n \to \infty. \tag{1.7}$$

On rappelle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si: $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [0,1], \exists N(\varepsilon,x); n \geq N(\varepsilon,x) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si: $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon); n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [0,1]$.
Ce théorème est assez "faible". Une conséquence de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est le théorème suivant (beaucoup plus fort que le précédent) : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, et $f \in E$. On a alors :

$$f_n \to f \;\text{ simplement quand } n \to \infty, \;\text{ et } |f_n(x)| \leq 1, \;\; \forall x \in [0,1], \;\; \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \;\text{ quand } n \to \infty. \tag{1.9}$$

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de "convergence dominée", il peut être démontré sans utiliser la théorie de l'intégrale de Lebesgue, mais cela est difficile: c'est l'objet de l'exercice 1.12.

1.2 Les probabilités

La théorie des probabilités s'est développée dans le but de "modéliser" les phénomènes aléatoires, c'est à dire de d'evelopper un formalisme mathématique pour exprimer les problèmes posés par ces phénomènes. En particulier, l'un des problèmes est de mesurer "la chance" d'un certain "évènement" de se réaliser. Une partie importante de ces phénomènes est de nature "discrète", c'est à dire qu'il existe une injection de l'ensemble des "cas possibles" dans $\mathbb{N}$. Lorsque de plus l'ensemble des "cas possibles" ou des "éventualités" est fini, le calcul des probabilités se ramène à des problèmes de dénombrement. Par contre, lorsque l'ensemble des "éventualités" est de nature infinie non-dénombrable, on aura besoin, pour définir une probabilité, de la théorie de la mesure. Les liens qui existent entre la théorie des probabilités et la théorie de la mesure et de l'intégration sont nombreux, mais malheureusement, le vocabulaire est souvent différent. Nous essaierons ici de montrer clairement les liens entre les deux théories et de donner un "dictionnaire" probabilités-intégration.

1.3 Objectifs

L'objectif est de construire une théorie de l'intégration donnant des théorèmes de convergence efficaces et de "bons" espaces fonctionnels, comme, par exemple, l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ qui est un espace de Hilbert. La démarche pour construire cette théorie va être très voisine de celle que l'on a utilisée pour l'intégrale des fonctions réglées (ou pour l'intégrale de Riemann), elle va suivre 3 étapes, que nous pouvons (dans le cas, par exemple, des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) décrire ainsi :

1. Mesurer "toutes" les parties de $\mathbb{R}$ (et pas seulement les intervalles).
2. Définir l'intégrale des fonctions étagées, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (et pas seulement des fonctions en escalier).
3. Par un "passage à la limite", définir l'intégrale des fonctions limites (en un sens convenable) de fonctions étagées.

Pour être plus précis, dans l'étape 1. ci-dessus, on cherche une application $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\lambda([\alpha,\beta]) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta. \tag{1.10}$$

$$\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n), \text{ pour toute famille } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A_n \cap A_m = \emptyset. \tag{1.11}$$

Une telle application sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'existe pas, mais elle existe si on se limite à une partie "convenable" de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (par exemple, la tribu de Borel définie ci-après), et cela va nous suffire.

Ce cours est divisé en 7 chapitres :

- Le chapitre 2 est une introduction à la théorie de la mesure ; on y définit en particulier l'application λ nécessaire pour mesurer les parties de $\mathbb{R}$; on y introduit aussi les premières notions de probabilités.
- Dans le chapitre 3, on introduit le concept d'application mesurable, et son synonyme "probabiliste", i.e. le concept de "variable aléatoire", qui est une notion fondamentale pour le calcul des probabilités. On y définit les notions de convergence "presque partout" et son synonyme probabiliste

"presque sûre", et de convergence "en mesure" et son synonyme probabiliste convergence "stochastique".

- On définit au chapitre 4 l'intégrale sur un espace mesuré (selon les points 1 à 3 définis plus hauts), et l'espérance des variables aéatoires en théorie des probabilités. On définit également dans ce chapitre notions de convergence en moyenne.
- On s'intéresse au chapitre 5 aux mesures définies sur les boréliens de $\mathbb{R}$ et aux propriétés particulières de l'intégrale définies sur $\mathbb{R}$. On y étudie les lois probabilités "de densité".
- Le chapitre 6 est consacré au produits d'espaces mesurés, à l'intégration de fonctions de plusieurs variables et au produit de convolution, et à l'application en probabilités sur les lois de sommes de variables aléatoires.
- On étudie au chapitre 7 les espaces "L^p", ensembles des "fonctions de puissance p-ième intégrable, et plus particulièrement l'espace L^2, qui est un espace de Hilbert, et on donne les résultats de densité et de dualité et de compacité. On introduit les notions de convergence "faible" et de convergence "étroite" (pour les probabilités).
- Le chapitre 8 est consacré l'étude de la transformée de Fourier des fonctions de L^1 (classes de fonctions intégrables au sens de Lebesgue) et de L^2 (classes de fonctions "de carré intégrable" au sens de Lebesgue) et des mesures. On introduit la "fonction caractéristique" de la théorie des probabilités.

1.4 Exercices

Exercice 1.1 (Convergences simple et uniforme)

Construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ t.q. $f_n \to f$ simplement, quand n $\to \infty$, et $f_n \not\to f$ uniformément, quand n $\to \infty$.

Exercice 1.2 (Intégrale d'une fonction continue)

Une fonction $g\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite "en escalier" s'il existe $n > 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ t.q. $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ et f constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \le i \le n-1$.

Pour g en escalier et $x_0, \ldots, x_n$ comme dans la définition ci dessus, on pose $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i)$, où a_i est la valeur prise par g sur $]x_i, x_{i+1}[$.

1. Montrer que la définition précédente est bien cohérente, c'est à dire que l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i. Montrer que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Construire une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que f soit limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, où I_n est l'intégrale de la fonction en escalier f_n, converge. Enfin, montrer que la limite $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ ne dépend que de f, et non de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose alors $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = I$.

3. Montrer que l'application qui à f associe l'intégrale de f est linéaire de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que, pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Exercice 1.3 (Propriétés de l'intégrale sur l'ensemble des fonctions continues)

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to \infty$.

1) Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \to 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

2) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

1. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers φ simplement mais non uniformément, telle que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

2. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers φ telle que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

3. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :

   (a) Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon, 1]$,

   (b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1,+1]$,

   montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

4. Vérifier que la suite de fonctions définies par $\varphi_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ satisfait les conditions énoncées à la question 3. Donner l'allure générale du graphe de ces fonctions pour des petites valeurs de n; que devient le graphe lorsque $n \to \infty$?

5. On suppose maintenant que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse suivante:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx = 0. \tag{1.12}$$

   A-t-on $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx\, dx = 0$? [On pourra par exemple utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon \geq 0$, ne dépendant que de ε, t. q. $a \leq \varepsilon + c_\varepsilon a^2$.]

6. Même question que ci dessus en remplaçant l'hypothèse (1.12) par : $\exists p > 1$; $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0$.

7. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx \leq C, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.13}$$

et que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 1]$, pour tout $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx = 0$.

8. Construire un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfasse aux hypothèses de la question précédente et qui ne soit pas bornée (donc qui ne satisfasse pas aux hypothèses de la question 5).

9. Peut-on remplacer l'hypothèse (1.13) par : il existe $p > 1$ et $C > 0$ t.q. $\int_0^1 |\varphi_n(x)|^p dx \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

10. Peut-on remplacer l'hypothèse (1.13) par : il existe $C > 0$ t.q. $\int_0^1 |\varphi_n(x)|dx \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 1.4 (Discontinuités d'une fonction croissante)

Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f a une limite à droite et une limite à gauche en tout point. On note $f(x^+)$ et $f(x^-)$ ces limites aux point x.

2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable. [On pourra considérer, pour $n \in \mathbb{N}$, les ensembles $A_n = \{x \in [0,1], f(x^+) - f(x^-) \geq (f(1^+) - f(0^-))/n\}$.]

Exercice 1.5 (Fonctions réglées)

Une fonction réelle définie sur $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ est dite réglée si elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

1. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable.

2. Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est réglée sur $[a, b]$ si et seulement si elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$, à droite en a, à gauche en b.

Exercice 1.6 (Normes définies par l'intégrale)

Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1, +1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\varphi \in E$, on pose $\|\varphi\|_1 = \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|\, dt$ et $\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace normé.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_n \in E$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ nx & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & si \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(E, \|\cdot\|_1)$, alors $\varphi(x) = 0$ si $x < 0$ et $\varphi(x) = 1$ si $x > 0$.

(b) En déduire que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

3. Montrer que $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace préhilbertien (c'est à dire que sa norme est induite par un produit scalaire) mais n'est pas complet (ce n'est donc pas un espace de Hilbert).

Exercice 1.7 (Rappels sur la convergence des suites réelles)

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq n} u_p$. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de u.

2. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on sait (conséquence du résultat de la question précédente) qu'il existe une suite extraite de u qui converge vers $\limsup_{n\to\infty} u_n$. Donner un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un ensemble E (d'au moins 2 éléments...) dans $\overline{\mathbb{R}}$ t.q. aucune sous suite ne converge simplement vers $\limsup_{n\to\infty} f_n$ (qui est définie par $(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty}(f_n(x))$ pour tout $x \in E$).

3. Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\liminf_{n\to\infty} u_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$. Donner un exemple d'une telle suite.

Exercice 1.8 (Fonctions caracteristiques d'ensembles)

Soit E un ensemble. Lorsque A est une partie de E, on définit $\mathbf{1}_A : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A(x) &= 1, \text{ si } x \in A, \\ \mathbf{1}_A(x) &= 0, \text{ si } x \notin A. \end{aligned} \tag{1.14}$$

$\mathbf{1}_A$ est appelée "fonction caracteristique de A" (elle est souvent aussi notée χ_A).

1. Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles disjoints de E, alors $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$. En déduire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de E deux à deux disjoints, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ (on précisera aussi le sens donné à "$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}$").

2. Montrer que si $B \subset A \subset E$, on a $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$.

3. Montrer que, pour A et B sous-ensembles de E, on a $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que f s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.

Exercice 1.9 (Exemple)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
Cette fonction est-elle intégrable au sens de Riemann ? Est-elle réglée ? Conclusion ?

Exercice 1.10 (Intégrale "impropre" de fonctions continues)

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ (fonction continue et positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que f est intégrable sur $[0, +/infty]$, c'est à dire que $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$.
1) A-t-on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
2) Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3) Montrer que si f est uniformément continue, alors f admet une limite en $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4) Donner un exemple de fonction f positive, uniformément continue, et qui n'admet pas de limite à l'infini (et qui n'est donc pas intégrable).
5) On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est continûment dérivable et que

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f'(t)\,dt \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
6) Montrer que pour tout $h > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = 0.$$

7) On suppose que φ est à support compact dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est intégrable et que

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{+\infty} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

Exercice 1.11 (Attention, piège !!)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ qui converge uniformément vers f.
1) On suppose que les fonctions f_n sont intégrables, c'est à dire

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \stackrel{def}{=} \lim_{a\to+\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx < +\infty.$$

La fonction f est-elle intégrable ?
2) On suppose de plus que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et que f est intégrable. A-t-on

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad ?$$

Exercice 1.12 (Convergence dominée et intégrale de Riemann)

(Cet exercice est extrait de l'examen d'analyse du concours d'entrée à l'ENSL, 1993)
On note $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Noter que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une norme.
Pour $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on définit f^+ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ (pour tout $x \in [0, 1]$), et $f^- = (-f)^+$ (de sorte que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$). Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), On dit que $f \geq g$ si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. On désigne par 0 la fonction (définie sur $\mathbb{R}$) identiquement nulle. On pose $E^+ = \{f \in E, f \geq 0\}$. Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On dit que T est positive si :

$$f \in E,\ f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0.$$

Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire positive.

1. Montrer que T est continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$. [Indication : On pourra remarquer que, pour tout $f \in E$, $T(f) \leq T(\mathbf{1})\|f\|_\infty$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante et égale à 1 sur $[0,1]$.]

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que f_n tend vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

   [Indication : Soit $\varepsilon > 0$, on pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $O_n = \{x \in [0,1]\,;\, f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ et utiliser la compacité de $[0,1]$.]

   En déduire que $T(f_n) \to T(f)$, quand $n \to +\infty$.

3. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $g \in E$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $g(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, pour tout $x \in [0,1]$.

   Montrer que $T(g) \leq \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que $f \in A^+$ si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$ et $\lim_{n\to+\infty} T(f_n) < +\infty$.

5. Soit $f \in A^+$, montrer que $\sup_{g\in E,\, g\leq f} (T(g)) < +\infty$.

   On définit T sur A^+ par $T(f) = \sup_{g\in E,\, g\leq f} (T(g))$ (noter que ceci est compatible avec la définition de T sur E.) Noter aussi que si $f, g \in A^+$, alors : $f \geq g \Longrightarrow T(f) \geq T(g)$).

6. ("Convergence croissante.") Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^+$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$ et $\lim_{n\to+\infty} T(f_n) < +\infty$. Montrer que $f \in A^+$ et $T(f) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

   [Indication : Considérer $g_p = \sup_{0\leq n\leq p} (f_{p,n})$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_{p,n})_{p\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $f_{p+1,n} \geq f_{p,n}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to+\infty} f_{p,n}(x) = f_n(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.]

7. ("Convergence décroissante.") Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^+$ et $f \in E$ telles que $f_{n+1} \leq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que $T(f) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

   [Indication : On pourra montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $h_n \in A^+$ telle que $h_n \geq f_n - f_{n+1}$ et $T(h_n) \leq T(f_n) - T(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Puis, en remarquant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(x) \geq f_0(x) - f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$, et en utilisant la question III 4, montrer que $T(f) \geq \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.]

8. ("Convergence dominée.") Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $g \in E$ telles que :

   1. $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
   2. $|g_n(x)| \leq 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que $T(g) = \lim_{n\to+\infty} T(g_n)$.

   [Indication : On pourra utiliser la question III 5 avec $f_n = \sup_{p\geq n} g_p - \inf_{p\geq n} g_p$ et remarquer que $g - g_n \leq f_n$ et $g_n - g \leq f_n$.]

9. (Exemple.) En choisissant convenablement T, montrer le résultat suivant :
   Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$ telles que :
   1. $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
   2. $|f_n(x)| \leq 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   alors $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$, quand $n \to +\infty$.
   Donner un contre exemple à ce résultat si la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée.

Exercice 1.13 (Théorème de Bernstein)

On veut démontrer ici le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Bernstein) *Soient E et F des ensembles quelconques, alors il existe une bijection de E dans F si et seulement si il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E.*

Le sens $(i) \implies (ii)$ est évident, on va donc supposer qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E, et on veut construire une bijection de E dans F. Soit $x \in E$ donné. On pose $x_0 = x$, et on construit par récurrence une suite $C_x = (x_k)_{k=\underline{k}(x),+\infty} \subset E \cup F$, avec $\underline{k}(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ de la manière suivante :
pour $k \geq 0$, on pose $x_{2k+1} = f(x_{2k})$, et $x_{2k+2} = f(x_{2k+1})$; si x_{-k} n'a pas d'antécédant par g ou par f (selon que $x_k \in E$ ou $\in F$, on pose $\underline{k}(x) = k$, sinon, on pose $x_{-k-1} = g^{-1}(x_{-k})$ si $x_k \in E$ et $x_{-k-1} = f^{-1}(x_{-k})$ si $x_k \in F$.
On définit ainsi $C_x = \{x_k, k = \underline{k}(x), +\infty\}$. On définit l'application φ de E dans F par : $\varphi(x) = f(x)$ si $\underline{k}(x)$ est pair et $\varphi(x) = g^{-1}(x)$ si $\underline{k}(x)$ est impair. Montrer que φ ainsi définie est une bijection de E dans F.

Exercice 1.14 (Limites sup et inf d'ensembles)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. On rappelle que

$$\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} A_p \quad \text{et} \quad \limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p.$$

1. On suppose la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone. Que sont $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$?
2. Même question si la suite est définie par : $A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B$, $p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de E.
3. Montrer que:

$$1_{\limsup A_n} = \limsup 1_{A_n} \ ,$$

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n \ ,$$

$$\liminf A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n^c}(x) < \infty\} \ ,$$

$$\limsup A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n}(x) = \infty\} \ .$$

Exercice 1.15 (Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$) $(\star)$

On va montrer ici que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit, pour x et $y \in \mathbb{R}$, la relation: $x \asymp y$ si $\{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\} \subset O$. Vérifier que $\asymp$ est une relation d'équivalence. Pour $x \in O$, on pose: $A(x) = \{y \in O; x \asymp y\}$.

1. Montrer que si $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$, alors $A(x) = A(y)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in O$, $A(x)$ est un intervalle ouvert.
3. Montrer qu'il existe $I \subset O$ dénombrable tel que $O = \bigcup_{x \in I} A(x)$, avec $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ si $x, y \in I$ et $x \neq y$.

Chapter 2

Tribus et mesures

2.1 Introduction... par les probabilités

2.1.1 Cas d'un problème "discret"

Pour introduire la série de définitions qui suivent, commençons par quelques exemples, tirés du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités s'intéresse à mesurer la "chance" qu' un certain "événement", résultat d'une expérience, a de se produire. Considérons par exemple "l'expérience" qui consiste à lancer un dé. On appelle "éventualité" associée à cette expérience un des résultats possibles de cette expérience, et "univers des possibles" l'ensemble E de ces éventualités. Dans notre exemple, les éventualités peuvent être $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6; on pourrait choisir aussi comme éventualités les résultats correspondant au "dé cassé". On peut donc tout de suite remarquer que l'ensemble E des univers du possible dépend de la modélisation, c'est à dire de la formalisation mathématique que l'on fait du problème. Notons qu'il est parfois difficile de définir l'ensemble E, et que les probabilistes se ramènent alors, grâce à une jolie "ruse" (que nous verrons plus loin) à mesurer les parties de $\mathbb{R}$: d'où le lien avec la théorie de la mesure que nous abordons ici.

A partir des éventualités, qui sont, par définition, les éléments de l'univers des possibles E, on définit les "événements", qui sont les parties de E. Dans l'exemple du dé, un événement peut être: "le résultat du lancer est pair". Cet événement est la partie $\{2, 4, 6\}$ de E. On appelle évènement élémentaire un singleton, par exemple 6, événement certain l'ensemble E tout entier, et l'événement "vide" l'ensemble vide $\emptyset$ (qui a donc une "chance" nulle de se réaliser). Pour mesurer "la chance" qu'a un événement de se réaliser, on va définir une application p de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E dans $[0, 1]$ avec certaines propriétés (de compatibilité)... La "chance" (ou probabilité) pour un événement $A \subset E$ de se réaliser sera donc $p(A) \in [0, 1]$.

Le problème que nous venons de considérer est un problème discret fini, au sens ou l'ensemble E est fini. On peut aussi envisager des problèmes discrets infinis (l'ensemble E est alors fini dénombrable (on rappelle qu'un ensemble I est dénombrable s'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout n, $m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.) ou des problèmes continus où E est infini non dénombrable.

2.1.2 Exemple continu

Considérons maintenant "l'expérience" qui consiste à lancer une balle de ping-pong sur une table de ping-pong. Soit E l'ensemble des points de la table de ping-pong, on peut voir E comme un sous-ensemble de

$\mathbb{R}^2$, un événement élémentaire serait donc un point $(x, y) \in E$, et un événement une partie $A \in \mathcal{P}(E)$. On suppose qu'on a effectué le lancer "sans viser", c'est à dire en supposant que n'importe quel point de la table a une chance égale d'être atteint (les événements élémentaires sont "équiprobables"), et que la balle tombe forcément sur la table (on est très optimiste...) on se rend compte facilement que la probabilité pour chacun des points de E d'être atteint doit être nulle, puisque le nombre des points est infini. On peut aussi facilement "intuiter" que la probabilité pour une partie A d'être atteinte (dans le modèle "équiprobable") est le rapport entre la surface de A et la surface de E. La notion intuitive de "surface" correspond en fait à la notion mathématique de "mesure" que nous allons définir dans le prochain paragraphe. Malheureusement, comme on l'a dit dans le chapitre introductif, il ne nous sera pas mathématiquement possible de définir une application convenable, i.e. qui vérifie les propriétés (1.10)-(1.11) et qui "mesure" toutes les parties de $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^2$, ou même du sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ (voir à ce sujet l'exercice 2.17). On va donc définir un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ (qu'on appelle "tribu") sur lequel on pourra définir une telle application. Dans le cas d'un ensemble fini, la tribu sera $\mathcal{P}(E)$ tout entier.

2.2 Définitions; tribu, mesure, probabilité

Définition 2.1 (Tribu) *Soient E un ensemble, T une famille de parties de E (i.e. $T \subset \mathcal{P}(E)$) ; T est une tribu si T vérifie :*

1. $\emptyset \in T, E \in T$
2. *T est stable par union dénombrable, c. à. d. que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.*
3. *T est stable par intersection dénombrable, c. à. d. que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.*
4. *T est stable par passage au complémentaire, , c. à. d. que pour tout $A \in T$, on a $A^c \in T$.*

Il est clair que, pour montrer qu'une partie T de $\mathcal{P}(E)$ est une tribu, il est inutile de vérifier les propriétés 1-4 de la proposition précédente. Il suffit de vérifier par exemple $\emptyset \in T$ (ou $E \in T$), 2 (ou 3) et 4.
Exemples de tribus sur E :

- $T = \{\emptyset, E\}$,
- $\mathcal{P}(E)$.

Définition 2.2 (Langage probabiliste) *Soient E un ensemble quelconque ("l'univers des possibles") et T une tribu ; on appelle "éventualité" les éléments de E et "événements" les éléments de T. On appelle "événement élémentaire" un singleton de T.*
On dit que deux événements $A, B \in T$ sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Soient E et I deux ensembles, et $(T_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur E. On pose $T = \{A \subset \mathcal{P}(E), A \in T_i, \forall i \in I\}$. Il est facile de vérifier que T est encore une tribu sur E (voir exercice 2.2). Cette remarque nous permet de définir ci-après la notion de tribu engendrée.

Définition 2.3 (Tribu engendrée) *Soient E un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la tribu $T(\mathcal{C})$ intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{C}$.*

Noter que $T(\mathcal{C})$ est bien une tribu, voir à ce sujet l'exercice 2.2 Il est important de remarquer que, contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire, les éléments de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ ne sont pas tous obtenus, à partir des éléments de $\mathcal{C}$, en utilisant les opérations : "intersection dénombrable", "union dénombrable" et "passage au complémentaire". Plus précisément, soient E un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$; on note $T(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, et on pose :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^1(\mathcal{C}) &= \{A \subset E \text{ t.q. } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\}, \\
\mathcal{R}^2(\mathcal{C}) &= \{A \subset E \text{ t.q. } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\}, \\
\mathcal{R}(\mathcal{C}) &= \mathcal{R}^1(\mathcal{C}) \cup \mathcal{R}^2(\mathcal{C}).
\end{aligned}$$

Prenons $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ (donc $T(\mathcal{C})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, voir définition ci après). Il est facile de voir que $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subset T(\mathcal{C})$, mais que, par contre (et cela est moins facile à voir), $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ n'est pas une tribu. En posant : $\mathcal{S}_0 = \mathcal{C}$, et $\mathcal{S}_n = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{n-1})$, pour $n \geq 1$, on peut aussi montrer que $\overline{\mathcal{S}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ n'est pas une tribu (et que $\overline{\mathcal{S}} \subset T(\mathcal{C})$).

Définition 2.4 (Tribu borélienne) *Soit E un ensemble muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de E, cette tribu sera notée $\mathcal{B}(E)$. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, cette tribu sera aussi notée $\mathcal{R}$.*

Définition 2.5 (Espace mesurable ou probabilisable, partie mesurable ou probabilisable) *Soient E un ensemble, et T une tribu sur E. Le couple (E,T) est appelé "espace mesurable" ou (en langage probabiliste !) "espace probabilisable". Les parties de E qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de T sont dites mesurables ou probabilisables (resp. non mesurables, non probabilisables).*

Définition 2.6 (Mesure) *Soit (E,T) un espace mesurable. On appelle mesure une application $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$, (avec $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$,) vérifiant :*

1. *$m(\emptyset) = 0$*
2. *m est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ de parties disjointes deux à deux, (i.e. telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$), on a :*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.1}$$

Remarque 2.1

1. Dans la définition précédente on a étendu à $\overline{\mathbb{R}}_+$ l'addition dans $\mathbb{R}_+$. On a simplement posé $x+\infty = \infty$, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Noter également que la somme de la série dans la définition précédente est à prendre dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et que, bien sûr, $= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ signifie simplement que $\sum_{p=0}^n a_p \to a$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to \infty$.
2. Soient $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Remarquer que $x + y = x + z$ implique $y = z$ si $x \neq \infty$.
3. Dans la définition précédente, la condition 1. peut être remplacée par la condition : $\exists\ A \in T, m(A) < \infty$. La vérification de cette affirmation est laissée au lecteur attentif.

4. Enfin, remarquer que, pour une série à termes positifs, l'ordre de sommation est sans importance. Plus précisément, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_\varphi(n)$.

Définition 2.7 (Mesure finie) *On appelle mesure finie une mesure m, sur un espace mesurable (E,T), telle que $m(E) < \infty$.*

Définition 2.8 (Probabilité) *On appelle probabilité une mesure p, sur un espace mesurable (ou probabilisable) (E,T), telle que $p(E) = 1$.*

Définition 2.9 (Espace mesuré, espace probabilisé) *Soient E un ensemble, T une tribu sur E, et m une mesure (resp. une probabilité sur T). Le triplet (E,T,m) est appelé "espace mesuré" (resp. "espace probabilisé").*

Définition 2.10 (Mesure σ-finie) *Soit (E,T,m) un espace mesuré, on dit que m est σ-finie (ou que (E,T,m) est σ-fini) si :*

$$\exists\,(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T, \quad m(A_n) < \infty, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \textit{et} \quad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n. \tag{2.2}$$

Remarque 2.2 (Langage probabiliste) En langage probabiliste, la propriété de σ-additivité (2.1) que l'on recquiert dans la définition d'une mesure (et donc d'une probabilité) est souvent appelé "axiome complet des probabilités totales".

Exemple 2.1 (Mesure de Dirac) Soient E un ensemble, T une tribu sur E et $a \in E$. on définit sur T la mesure δ_a par (pour $A \in T$) :

$$\delta_a(A) = 0, \quad \text{si } a \notin A, \tag{2.3}$$

$$\delta_a(A) = 1, \quad \text{si } a \in A. \tag{2.4}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.

Remarque 2.3 (Comment choisir la probabilité) Soient (E,T) un espace probabilisable, on peut évidemment définir plusieurs probabilités sur T. C'est tout l'art de la modélisation que de choisir une probabilité qui rende compte du phénomène aléatoire que l'on veut observer. On se base pour cela souvent sur la notion de fréquence, qui est une notion expérimentale à l'origine. Soit $A \in T$ un événement, dont on cherche à évaluer la probabilité $p(A)$. On effectue pour cela N fois l'expérience dont l'univers des possibles est E, et on note N_A le nombre de fois où l'événement A est réalisé. A N fixé, on définit alors la *fréquence* $f_A(N)$ de l'événement A par :

$$f_A(N) = \frac{N_A}{N}.$$

Expérimentalement, il s'avère que $f_N(A)$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$. C'est ce qu'on appelle la "loi empirique des grands nombres". On peut donc définir "expérimentalement" $p(A) = \lim_{N\to+\infty} f_N(A)$. Cependant, on n'a pas ainsi démontré que p est une probabilité: il ne s'agit pour l'instant que d'une approche intuitive. On démontrera plus loin la loi forte des grands nombres, qui permettra de justifier mathématiquement la loi empirique. On peut remarquer que $f_N(E) = \frac{N}{N} = 1\ldots$

Exemple 2.2 (Le cas "équiprobable") Soit (E, T, p) un espace probabilisé, où les événements élémentaires sont équiprobables. On suppose que tous les singletons de E appartiennent à la tribu. On a alors: $p(\{x\}) = \frac{1}{\mathrm{card} E}$, $\forall x \in E$.

Définition 2.11 (Mesure signée) *Soit (E, T) un espace mesurable. On appelle mesure signée une application $m : T \to \mathbb{R}$ t.q. $m(\emptyset) = 0$ et vérifiant la propriété de σ-additivité, c'est-à-dire telle que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$,*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.5}$$

Dans toute la suite du cours, les mesures considérées seront en général positives, c.à.d. (cf définition 2.6) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Dans le cas contraire, on précisera qu'elles sont "signées".

Soient (E, T) un espace mesurable, et m une mesure signée sur T. On peut montrer (voir exercice 2.22) qu'il existe deux mesures (positives) finies sur T, notées m^+ et m^-, telles que :

1. $m(A) = m^+(A) - m^-(A)$, pour tout $A \in T$,
2. Les mesures m^+ et m^- sont étrangères, c.à.d. qu'il existe $C \in T$ tel que $m^+(C) = 0$, et $m^-(E \setminus C) = 0$.

Définition 2.12 (mesure atomique) *Soit (E, T, m) un espace mesuré tel que : $\{x\} \in T$ pour tout x de E. On dit que m est portée par $S \in T$ si $m(S^c) = 0$. Soit $x \in E$, on dit que x est un atome ponctuel de m si $m(\{x\}) \neq 0$. On dit que m est purement atomique si elle est portée par ses atomes ponctuels.*

Définition 2.13 (Mesure diffuse) *Soient (E, T) un espace mesurable et m une mesure sur T (ou m une mesure signée sur T). On dit que m est diffuse si $\{x\} \in T$ et $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$.*

Définition 2.14 (Partie négligeable) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $A \subset E$. On dit que A est négligeable si il existe un ensemble $B \in T$ tel que $A \subset B$ et $m(B) = 0$.*

Définition 2.15 (Mesure complète) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, on dit que m est complète (ou que (E, T, m) est complet) si toutes les parties négligeables sont mesurables, c'est-à-dire appartiennent à T.*

2.3 Propriétés des mesures

Proposition 2.1 (Propriétés des mesures) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. la mesure m vérifie les quatre propriétés suivantes :*

1. *Monotonie : Soient A, $B \in T$, $A \subset B$, alors*

$$m(A) \leq m(B) \tag{2.6}$$

2. *σ-sous-additivité : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.7}$$

3. *Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)) \tag{2.8}$$

4. *Continuité décroissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$, alors*

$$m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)) \tag{2.9}$$

La démonstration de ces propriétés est facile: elles découlent toutes du caratère positif et du caractère σ-additif de la mesure. Attention: ces propriétés ne sont pas vérifiées par les mesures signées.

Théorème 2.1 (Mesure complétée) *Soit (E, T, m) un espace mesuré, on note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N,\ A \in T,\ N \in \mathcal{N}_m\}$. Alors $\overline{T}$ est une tribu, et il existe une et une seule mesure, notée $\overline{m}$, sur $\overline{T}$, égale à m sur T. De plus, une partie de E est négligeable pour $(E, \overline{T}, \overline{m})$ si et seulement si elle est négligeable pour (E, T, m). L'espace mesuré $(E, \overline{T}, \overline{m})$ s'appelle le complété de (E, T, m), et la mesure $\overline{m}$ s'appelle la mesure complétée de la mesure m.*

Démonstration : On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables de E pour la mesure m.

1. Montrer que $\overline{T} = \{A \cup N\ ;\ A \in T \text{ et } N \in \mathcal{N}_m\}$ est une tribu, et que $T \subset \overline{T}$.

2. Montrer qu'il existe une unique mesure $\overline{m}$ sur $\overline{T}$ telle que $\overline{m}|_T = m$. [On pourra commencer par montrer que si $\overline{m}$ existe alors elle vérifie : $\overline{m}(A \cup N) = m(A)$, et montrer ensuite que l'application $\overline{m}$ ainsi définie a un sens et que c'est une mesure sur $\overline{T}$]

3. Montrer que $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}} = \{B \subset E$ telles qu' il existe un ensemble $C \in \overline{T}$ tel que $B \subset C$ et $\overline{m}(C) = 0\}$, et en déduire que $\overline{m}$ est complète, c.à.d. $\mathcal{N}_{\overline{m}} \subset \overline{T}$. ■

Définition 2.16 (Mesure absolument continue, mesure étrangère)
Soient (E, T) un espace mesurable, et m et μ des mesures (positives) sur T.

1. *On dit que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m si pour tout $A \in T$ tel que $m(A) = 0$, alors $\mu(A) = 0$.*

2. *On dit que la mesure μ est étrangère à la mesure m si il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $\mu(A^c) = 0$.*

Proposition 2.2 *Soient (E, T) un espace mesurable, et m et μ des mesures (positives) sur T; on suppose de plus que la mesure μ est σ-finie. Alors il existe une mesure μ_a absolument continue par rapport à m et une mesure μ_e étrangère à m (et à μ_a) t.q. $\mu = \mu_a + \mu_e$.*

Démonstration : On suppose d'abord que μ est une mesure finie. On pose $\alpha = \{\mu(A); A \in T, m(A) = 0\}$.

1. Montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) = 0$ et $\mu(C) = \alpha$.

2. Pour $A \in \mathcal{T}$, on pose $\mu_e(A) = \mu(A \cap C)$.Montrer que μ_e est étrangère à m.

3. On pose, pour $A \in T$, $\mu_a(A) = \mu(A \cap C^c)$. Montrer que μ_a est une mesure absolument continue par rapport à m et que $\mu = \mu_e + \mu_a$.

Généraliser au cas où μ est σ-finie. ■

2.4 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Rappelons que l'un de nos objectifs est de construire une application λ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que l'image par λ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit la longueur de cet intervalle, et qui vérifie les propriétés (1.10) et (1.11). On peut montrer (voir exercice 2.18) qu'une telle application n'existe pas sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (voir aussi exercice 2.17). Le théorème suivant donne l'existence d'une telle application sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$: cette application s'appelle la mesure de Lebesgue.

Théorème 2.2 (Carathéodory) *Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{R}$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, telle que $\lambda(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $-\infty < \alpha \le \beta < +\infty$.*

Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce théorème. Nous donnons dans cette section une démonstration possible. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On définit $\lambda^*(A) = \inf_{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E_A} \sum_{i=1}^{n} l(A_i)$, où E_A est l'ensemble des familles dénombrables d'intervalles ouverts dont l'union contient A, et $l(A_i)$ représente la longueur de l'intervalle A_i. On peut montrer (voir l'exercice 2.17) que l'application λ^* ainsi définie de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ n'est pas σ- additive (ce n'est donc pas une mesure, c'est une "mesure extérieure").
On montre par contre dans cette section que la restriction de λ^* à $\mathcal{R}$ est une mesure, qu'on note λ, mesure de Lebesgue. L'existence de la mesure de Lebesgue découle aussi d'un théorème plus général (de F. Riesz) que nous verrons dans un chapitre ultérieur.

Après la définition de $\lambda^\star$ et la démonstration de propriétés de $\lambda^\star$, on donne la démonstration de la partie "existence" du théorème de Carathéodory (voir page 23). Puis, la partie "unicité" du théorème de Carathéodory (voir page 25) découlera du théorème de "régularité" sur les mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Théorème 2.3) et d'un lemme classique sur les ouverts de $\mathbb{R}$ (lemme 2.2)

Définition 2.17 (Définition de $\lambda^\star$) *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On pose $\lambda^\star(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n);\ (I_n)n \in \mathbb{N} \in E_A\}$, avec $E_A = \{(I_n)n \in \mathbb{N};\ In =]a_n, b_n[,\ -\infty < a_n \le b_n < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n\}$.*

Proposition 2.3 (Propriétés de $\lambda^\star$) *L'application $\lambda^\star : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\lambda^\star(\emptyset) = 0$,
2. *(Monotonie)* $\lambda^\star(A) \le \lambda^\star(B)$, *pour tout* A, $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \subset B$,
3. *(σ−sous additivité) Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *et* $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *alors* $\lambda^\star(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(A_n)$,
4. $\lambda^\star(]a, b[) = b - a$ *pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *t.q.* $-\infty < \alpha \le \beta < +\infty$.

DÉMONSTRATION :
la démonstration des 2 premières propriétés est facile. pour la troisième, soit $(A_n)n \in \mathbb{N} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de considérer le cas où $\lambda^\star(A_n) < \infty$ (sinon, l'inégalité est immédiate). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(I_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}) \in E_{A_n}$ t.q. $\sum_{m\in\mathbb{N}} l(I_{n,m}) \le \lambda^\star(A_n) + \varepsilon/(2^n)$. On remarque alors que $(I_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est un recouvrement de A par des intervalles ouverts et donc que $\lambda^\star(A) \le \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} l(I_{n,m})$. Noter que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} l(I_{n,m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_{\varphi(n)}$, où φ est une bijection de N dans N^2 (cette somme ne dépend pas de la bijection choisie, voir la remarque 2.1). Avec le lemme 2.1 ci dessous, on en déduit $\lambda^\star(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} l(I_{n,m})) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(A_n) + 2\varepsilon$. ce qui donne bien, quand $\varepsilon \to 0$, $\lambda^\star(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(A_n)$.
Pour montrer la quatrième propriété. on commence par montrer

$$\lambda^\star([a,b] = b-a,\ \forall a,b \in \mathbb{R}, a<b. \tag{2.10}$$

Soit donc a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Comme $[a,b] \subset]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lambda^\star([a,b]) \le b-a+2eps$. On en déduit $\lambda^\star([a,b]) \le b-a$. Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $\varepsilon > 0$ et $(I_n)n \in \mathbb{N} \in E_{[a,b]}$. Par compacité de $[a,b]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $[a,b] \subset \cup_{p=0}^n I_p$. On peut alors construire (par récurrence) i_0, i_1, $\ldots$, $i_q \in 0,\ldots,n$ t.q. $a_{i_0} < a$, $a_{i_{p+1}} < b_{i_p}$ pour tout $p \in 0,\ldots,q-1$, $b < b_{i_q}$. On en déduit que $b-a < \sum_{p=0}^q b_{i_p} - a_{i_p} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n)$ et donc $b-a \le \lambda^\star([a,b])$. Ceci donne bien (2.10). La monotonie de $\lambda^\star$ permet alors de montrer que $\lambda^\star(]a,b[) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}, a<b$ mais aussi que $\lambda^\star([a,b[) = \lambda^\star(]a,b]) = \lambda^\star(]a,b[)$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}, a<b$. et enfin que $\lambda^\star(]-\infty,a]) = \lambda^\star(]-\infty,a[) = \lambda^\star(]a,infty]) = \lambda^\star([a,infty]) = infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. ■

Lemme 2.1 (Double série à termes positifs) *Soit* $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{R}_+$. *Alors on a :*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}).$$

DÉMONSTRATION : On pose $A = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m}$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m})$. soit φ une bijection de N dans N^2. On rappelle que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_{\varphi(p)}$.
Pour tout i, $j \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\{0,\ldots,i\} \times \{0,\ldots j\} \subset \{\varphi(0),\ldots,\varphi(n)\}$. Comme $a_{n,m} \ge 0$ pour tout (n,m), on en déduit que $A \ge \sum_{p=0}^n a_{\varphi(p)} \ge \sum_{n=0}^i (\sum m = 0^j a_{n,m})$. Et donc, en faisant tendre j puis i vers ∞, que $A \ge B$. Un raisonnement similaire donne que $B \ge A$ et donc $A = B$. ■

On introduit maintenant la tribu de Lebesgue, sur laquelle on montrera que $\lambda^\star$ est une mesure.

Définition 2.18 (Tribu de Lebesgue) *On pose* $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{P}(\mathbb{R});\ \lambda^\star(A) = \lambda^\star(A\cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)\ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$.

Remarque 2.4 *Pour tout* E, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, *on a, par* $\sigma-$*sous additivité de* $\lambda^\star$, $\lambda^\star(A) \le \lambda^\star(A\cap E) + \lambda^\star(A\cap E^c)$. *Pour montrer que* $E \in \mathcal{L}$ *(définie dans la définition 2.18), il suffit donc de montrer que* $\lambda^\star(A) \ge \lambda^\star(A\cap E) + \lambda^\star(A\cap E^c)$, *pour* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.4 (Propriétés de $\mathcal{L}$) $\mathcal{L}$ *est une tribu sur* $\mathbb{R}$ *et* $\lambda^\star_{|\mathcal{L}}$ *est une mesure*

DÉMONSTRATION :
Il est immédiat que $\emptyset \in \mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ est stable par "passage au complémentaire". On sait aussi que $\lambda^\star(\emptyset) = 0$. Il reste donc à démontrer que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et que la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{L}$ est une mesure. Ceci se fait en deux étapes décrites ci-après.

Etape 1. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union finie et que, si $n \ge 2$ et $(E_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathcal{L}$ est t.q. $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \ne j$, alors on a :

$$\lambda^\star(A \cap (\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \lambda^\star(A \cap E_i),\ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}). \tag{2.11}$$

(Cette dernière propriété donne l'additivité de $\lambda^s tar$ sur $\mathcal{L}$ en prenant $A = E$.)

Par une récurrence facile, il suffit de montrer que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{L}$ si E_1, $E_2 \in \mathcal{L}$ et de montrer la propriété (2.11) pour $n = 2$. Soit donc E_1, $E_2 \in \mathcal{L}$. On pose $E = E_1 \cup E_2$. Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$, il suffit de montrer (voir la remarque (2.4)) que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Par $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$ on a

$$\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^\star((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)) \leq \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2),$$

et donc

$$\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Comme $E_2 \in \mathcal{L}$, on a $\lambda^\star(A \cap E_1^c) = \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E^c)$. Puis, comme $E_1 \in \mathcal{L}$, on a $\lambda^\star(A) = \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_1^c)$. On en déduit

$$\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^\star(A).$$

Ce qui prouve que $E \in \mathcal{L}$.

pour montrer (2.11) avec $n = 2$ si E_1, $E_2 \in \mathcal{L}$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, il suffit de remarquer que (pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$) $\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^\star((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)) = \lambda^\star([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1) + \lambda^\star([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c) = \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_2)$. (On a utilisé le fait que $E_1 \in \mathcal{L}$.) Ceci termine l'étape 1.

Une conséquence de cette étape (et du fait que $\mathcal{L}$ est stable par passage au complémentaire) est que $\mathcal{L}$ est stable par union finie.

Etape 2. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{L}$ est une mesure (ce qui termine la démonstration de la proposition 2.4).

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. on veut montrer que $E \in \mathcal{L}$. On commence par remarquer que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ avec $F_0 = E_0$ et, par récurrence, pour $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus \cup_{p=0}^{n-1} F_p$. L'étape 1 nous donne que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et, comme $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on peut utiliser (2.11). Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a donc $\lambda^\star(A) = \lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)) + \lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c) = \sum_{p=0}^n \lambda^\star(A \cap F_p) + \lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c)$. En faisant tendre n vers ∞ dans la relation précédente, en utilisant le fait que $E^c \subset (\cup_{p=0}^n F_p)^c$, la monotonie et la $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$, on en déduit $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E^c)$. ce qui prouve que $E \in \mathcal{L}$ et donc que $\mathcal{L}$ est une tribu.

Il reste à montrer que $\lambda^\star$ est une mesure sur $\mathcal{L}$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ t.q. $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Par monotonie de $\lambda^\star$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^\star(\cup_{p=0}^n E_p) \leq \lambda^\star(E)$ et donc, en utilisant l'additivité de $\lambda^\star$ sur $\mathcal{L}$ (démontrée à l'étape 1, voir (2.11) avec $A = E$), $\sum_{p=0}^n \lambda^\star(E_p) \leq \lambda^\star(E)$. Ce qui donne, passant à limite quand $n \to \infty$, $\sum_{p=0}^\infty \lambda^\star(E_p) \leq \lambda^\star(E)$. D'autre part, $\lambda^\star(E) \leq \sum_{p=0}^\infty \lambda^\star(E_p)$, par $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$. On a donc $\lambda^\star(E) = \sum_{p=0}^\infty \lambda^\star(E_p)$. Ce qui prouve que $\lambda^\star_{|\mathcal{L}}$ est une mesure.

■

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE "EXISTENCE" DU THÉORÈME 2.2 :

Pour montrer la partie "existence" du théorème 2.2, il suffit, grâce aux propositions 2.3 et 2.4, de montrer que $\mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.18) contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour cela, il suffit de montrer que $]a, \infty[\subset \mathcal{L}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (car $\{]a, \infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit donc $a \in \mathbb{R}$ et $E =]a, \infty[$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on veut montrer que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$. On peut supposer que $\lambda^\star(A) < \infty$ (sinon l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de $\lambda^\star(A)$, il existe $(I_n)n \in \mathbb{N} \in E_A$ t.q. $\lambda^\star(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n) - \varepsilon$. Comme $A \cap E \subset (\cup_{n\in\mathbb{N}}(I_n \cap E))$ et $A \cap E^c \subset (\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap E^c))$, la $\sigma-$sous addivité de $\lambda^s tar$ donne

$$\lambda^\star(A \cap E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(I_n \cap E),\ \lambda^\star(A \cap E^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(I_n \cap E^c).$$

Comme $I_n \cap E$ et $I_n \cap E^c$ sont des intervalles, la fin de la démonstration de la proposition 2.3 donne $\lambda^\star(I_n \cap E) = l(I_n \cap E)$ et $\lambda^\star(I_n \cap E^c) = l(I_n \cap E^c)$. On en déduit $\lambda^\star(A\cap E)+\lambda^\star(A\cap E^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(l(I_n\cap E)+l(I_n\cap E^c)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(l(I_n)$ (car $l(I_n\cap E)+l(I_n\cap E^c) = (l(I_n))$ et donc $\lambda^\star(A\cap E)+\lambda^\star(A\cap E^c) \leq \lambda^\star(A)+\varepsilon$. Quand $\varepsilon \to 0$ on trouve l'inégalité recherchée. On a bien montré que $E \in \mathcal{L}$. ■

Avant de démontrer la partie "unicité" du théorème 2.2, on va démontrer un théorème important qui donnera, en particulier, la partie "unicité" du théorème 2.2.

Théorème 2.3 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les bornés)
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que m est finie sur les bornés, c'est à dire que $m(B) < \infty$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, B borné. Alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. En particulier, on a donc $m(A) = \inf\{m(O);\ O$ ouvert contenant $A\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION :
On appelle T l'ensemble des $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O\setminus F) \leq \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{]a,b[, -\infty < a < b < \infty$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ceci donnera $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

le fait que $\mathcal{C} \subset T$ est facile. En effet, soit $-\infty < a < b < \infty$. On a, pour tout n t.q. $(2/n) < b-a$, $[a+(1/n), b-(1/n)] \subset A \subset]a,b[$ et $m(]a,b[\setminus[a+(1/n), b-(1/n)] = m(]a, a+(1/n)[\cup]b-(1/n), b[) \to 0$ quand $n \to \infty$, en utilisant la continuité décroissante de m (noter qu'on a utilisé ici le fait que m est finie sur les bornés). Ceci prouve que $]a,b[\in T$.

Pour montrer que T est une tribu, on remarque que $\emptyset \in T$ et que T est stable par passage au complémentaire. Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable. Soit donc $(A_n)n \in \mathbb{N} \subset T$, $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert et F_n fermé t.q. $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \leq (\varepsilon/2^n)$. On pose $O = \cup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ et $\tilde{F} = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. On a bien $F \subset A \subset O$, $m(O\setminus F) \leq 2\varepsilon$ (car $O\setminus F \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} O_n \setminus F_n$) et O ouvert mais $\tilde{F}$ n'est pas nécessairement fermé... on distingue maintenant 2 cas :

Premier cas. On suppose que $m(A) < \infty$. On a alors $m(\tilde{F}) < \infty$. Par continuité croissante de m on a $m(\cup_{p=0}^n F_n) \to m(\tilde{F})$, quand $n \to \infty$, d'où (puisque $m(\tilde{F}) < \infty$) $m(\tilde{F}) - m(\cup_{p=0}^n F_n) \to 0$. On prend alors $F = \cup_{p=0}^n F_n$ avec n assez grand pour que $m(\tilde{F}) - m(F) \leq \varepsilon$. On a bien $F \subset A \subset O$, O ouvert, F fermé et $m(O \setminus F) \leq 3\varepsilon$. Ceci prouve que $A \in T$.

Deuxième cas. On suppose que $m(A) = \infty$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$, on pose $B = A\cap[p, p+1[$. Pour $m \geq 1$ on remarque que $F_n\cap[p, p+1-(1/m)] \subset B \subset O_n\cap]p-(1/m), p+1[$ et que $(F_n\cap[p, p+1-(1/m)])\setminus(O_n\cap]p-(1/m), p+1[) \subset]p-(1/m), p[\cup]p+1-(1/m)[\cup(O_n\setminus F_n$. On a donc $m(F_n\cap[p, p+1-(1/m)])\setminus(O_n\cap]p-(1/m), p+1[) \leq (\varepsilon/2^n)+m](p-(1/m), p[\cup]p+1-(1/m)[) \leq (2\varepsilon/2^n)$ si m est assez grand car $m](p-(1/m), p[\cup]p+1-(1/m)[) \to 0$ quand $m \to \infty$ (par continuité décroissante de m, ici aussi on utilise que m est finie sur les bornés). On choisi donc un tel m (qui dépend donc de n et p) et on pose $F_{n,p} = F_n\cap[p, p+1-(1/m)]$ ($F_{n,p}$ est fermé) et $O_{n,p} = O_n\cap]p-(1/m), p+1[$ ($O_{n,p}$ est ouvert). On raisonne ensuite comme dans le premier cas, on pose $\hat{O} = \cup_{n\in\mathbb{N}} O_{n,p}$ et $\hat{F} = \cup q = 0^n F_{n,p}$ avec n assez grand pour que $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,p} \setminus \hat{F}) \leq \varepsilon$. On obtient $\hat{F} \subset B \subset \hat{O}$ et $m(\hat{O} \setminus \hat{F} \leq 5\varepsilon$.

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a donc montré que pour tout ε il existe un ouvert O et un fermé F t.q. $F \subset A \cap [p, p+1[\subset O$ et $m(O \setminus F)\varepsilon\varepsilon$. On souhaite maintenant montrer cette propriété avec A tout entier au lieu de $A \cap [p, p+1[$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert $\hat{O}_p$ et un fermé $\hat{F}_p$ t.q. $\hat{F}_p \subset A \cap [p, p+1[\subset \hat{O}_p$ et $m(\hat{O}_p \setminus \hat{F}_p \leq \varepsilon/(2^{|p|}$. On prend $O = \cup_{p\in\mathbb{Z}} \hat{O}_p$ et $F = \cup_{p\in\mathbb{Z}} \hat{F}_p$. On obtient $F \subset A \subset O$, $m(O \setminus F) \leq 3\varepsilon$,

O est ouvert et on montre que F est fermé en utilisant le fait que $F_p \subset [p, p+1[$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Ceci montre bien que $A \in T$. ceci termine la démonstration du fait que T est une tribu et permet de conclure que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Il reste à montrer que $m(A) = \inf\{m(O);\ O$ ouvert contenant $A\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est une conséquence facile de la première partie du théorème de régularité (en distinguant les cas $m(A) = \infty$ et $m(A) < \infty$).

■

Pour démontrer la partie "unicité" du théorème 2.2 on aura aussi besoin du petit lemme suivant.

Lemme 2.2 (Ouverts de $\mathbb{R}$) *Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2, c'est à dire qu'il existe $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. I_n est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \neq m$ et $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.*

DÉMONSTRATION :
Pour $x \in O$ on pose $O_x = \{y \in O;\ I(x,y) \subset O\}$, avec $I(x,y) = \{tx + (1-t)y,\ t \in [0,1]\}$. On remarque que $O = \cup_{x \in O} O_x$ et que O_x est, pour tout $x \in O$ un intervalle ouvert (c'est l'intervalle $]\inf 0_x, \sup O_x[$, avec $\inf 0_x$, $\sup O_x \in \overline{\mathbb{R}}$). Il est aussi facile de voir que, pour tout x, $y \in O$, $O_x \cap O_y \neq \emptyset$ implique que $O_x = O_y$. on peut trouver $A \subset O$ t.q. $O = \cup_{x \in A} O_x$ et $O_x \cap \Omega_y = \emptyset$ si x, $y \in A$, $x \neq y$. Comme $O_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$, on peut donc construire un application de A dans $\mathbb{Q}$ en choisissant pour chaque $x \in A$ un rationnel de O_x (ce qui est possible car tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel). Cette application est injective car $O_x \cap \Omega_y = \emptyset$ si x, $y \in A$, $x \neq y$. l'ensemble A est donc au plus dénombrable, ce qui termine la démonstration du lemme.

■

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE "UNICITÉ" DU THÉORÈME 2.2 :
On a construit une mesure, notée λ, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(]a,b[)$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supposons que m soit aussi une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $m(]a,b[)$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En utilisant le lemme 2.2 et les propriétés de $\sigma-$additivité de λ et de m, on en déduit que $\lambda(O) = m(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m et pour λ), on obtient $\lambda(A) = m(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, i.e. $m = \lambda$.

■

On donne maintenant une propriété, spécifique à la mesure de Lebesgue, qui est à la base de toutes les formules de changement de variables pour l'intégrale de lebesgue.

Proposition 2.5 (Invariance par translation "généralisée") *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta,\ x \in A\}$. On a alors :*

1. *$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ implique $\alpha A + \beta in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*
2. *$\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha| \lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Pour $\alpha = 1$, cette propriété s'appelle "invariance par translation de λ".

DÉMONSTRATION :

Pour la première partie de la proposition, on pose $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ \alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On montre facilement que T est une tribu contenant les intervalles ouverts, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour la deuxième partie, on pose, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m_1(A) = \lambda(\alpha A + \beta)$ et $m_2(A) = |\alpha|\lambda(A)$. Il est facile de vir que m_1 et m_2 sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les bornés, et qu'elles sont égales sur l'ensemble des intervalles ouverts. On raisonne alors comme dans la démonstration de la la partie "unicité" du théorème 2.2 : En utilisant le lemme 2.2 et les propriétés de $\sigma-$additivité de m_1 et de m_2, on en déduit que $m_1(O) = m_2(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m_1 et pour m_2), on obtient $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

■

Une conséquence de la régularité est aussi la deuxième assertion du corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *Soit $A \in \mathcal{R}$, alors*

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(O), O \textit{ ouvert de } \mathbb{R}, A \subset O\} \textit{ et,}$$

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K), O \textit{ compact de } \mathbb{R}, K \subset A\}.$$

Remarque 2.5 La mesure de Lebesgue est diffuse (c.à.d. que $\lambda(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, $\lambda(D) = 0$. Ainsi, $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$. La réciproque est fausse. On construit par exemple un ensemble (dit "ensemble de Cantor", K, qui est une partie compacte non dénombrable de [0,1], vérifiant $\lambda(K) = 0$, voir exercice 2.21.

Remarque 2.6 (Sur la définition de la mesure...) Rappelons que la construction de la mesure (et en particulier de la mesure de Lebesgue) est l'étape 1 de la construction de l'intégrale de Lebesgue.

1. On demande dans la définition d'une mesure l'additivité pour des unions infinies dénombrables d'ensembles de manière à pouvoir plus tard passer à la limite sur les sommes.

2. On peut noter à ce propos que la notion de limite recquiert que l'espace "d'arrivée" (pour les fonctions que l'on veut intégrer par rapport à une mesure sur l'espace de "départ") soit un espace topologique (ce qui est le cas pour $\overline{\mathbb{R}}_+$), c.à.d., par exemple, qu'on a besoin de la notion de convergence pour pouvoir définir une somme infinie.

3. On ne veut que la propriété "d'additivité" sur des unions dénombrables, et non sur des unions infinies quelconques. Notons que si l'on considérait des unions infinies quelconques, on ne pourrait en particulier pas définir la mesure de Lebesgue car on aboutirait alors à la contradiction suivante : $b - a = \lambda([a,b]) = \sum_{c\in[a,b]} \lambda(\{c\}) = 0, \forall -\infty < a \leq b < +\infty$.

Définition 2.19 (Mesure de lebesgue sur un borélien de $\mathbb{R}$) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou, plus généralement, $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) et $T = \{B \in B(\mathbb{R});\ B \subset I\}$ (on peut montrer que $T = \mathcal{B}(I)$, où I est muni de la toplogie induite par celle de $\mathbb{R}$). Il est facile de voir que T est une tribu sur I et que la restriction de λ (définie dans le théorème 2.2) à T est une mesure sur T (donc sur les borélien de I). On note toujours par λ cette mesure.*

2.5 Indépendance et probabilité conditionnelle

Commençons par expliquer la notion de probabilité conditionnelle sur l'exemple du lancer de dé. On se place dans le modèle équiprobable: soient $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $T = \mathcal{P}(E)$ et p la probabilité définie par $p(\{x\}) = \frac{1}{6}$, $\forall x \in E$. La probabilité de l'événement A "obtenir 6" est $\frac{1}{6}$. Supposons maintenant que l'on veuille évaluer la chance d'obtenir un 6, alors que l'on sait déjà que le résultat est pair (événement $B = \{2,4,6\}$). Intuitivement, on a envie de dire que la "chance" d'obtenir un 6 est alors $\frac{1}{\mathrm{card} B} = \frac{1}{3}$.

Définition 2.20 (Probabilité conditionnelle) *Soient (E,T,p) un espace probabilisé et $A, B \in T$, $p(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A par rapport à B (on dit aussi probabilité de A sachant B), notée $p(A|B)$ est définie par : $p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$.*

De cette définition on déduit la formule de Bayes: soient (E,T,p) un espace probabilisé et $A, B \in T$, alors:

$$p(B).p(A|B) = p(A \cap B). \tag{2.12}$$

Remarque 2.7 *Soient (E,T,p) un espace probabilisé et A un événement tel que $p(A) \neq 0$. Alors l'application $p_A : T \to [0,1]$ définie par:*

$$p_A(B) = p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \forall B \in T \tag{2.13}$$

est une probabilité sur T. On dit que "la masse de p_A est concentrée en A" : on a en effet : $p_A(B) = 0$, $\forall B; A \cap B = \emptyset$.

Définition 2.21 *Soit (E,T,p) un espace probabilisé, on appelle système de constituants une famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ d'ensembles disjoints deux à deux telle que $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = E$.*

On a comme corollaire immédiat de la relation 2.12:

Proposition 2.6 *Soient (E,T,p) un espace probabilisé, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ un système de constituants de probabilités non nulles et $A \in T$, alors:*

$$p(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(C_n).p(A|C_n). \tag{2.14}$$

Dans le cas où $p(B) = p(B|A)$, on a envie de dire que A n'influe en rien sur B ; on a dans ce cas: $p(A).p(B) = p(A \cap B)$.

Définition 2.22 (Indépendance de deux évènements) *Soient (E,T,p) on dit que deux événements A et B sont (stochastiquement) indépendants si $p(A).p(B) = p(A \cap B)$.*

Remarque 2.8 Attention: il est clair que, lors de la modélisation d'un phénomène aléatoire, si on a des évènements indépendants "a priori", i.e. tels que la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre, on choisira, pour le modèle probabiliste, une probabilité qui respecte l'indépendance: on dit que l'indépendance "a priori" implique l'indépendance stochastique. Cependant, la notion d'indépendance est liée à la notion de probabilité; ainsi, pour une probabilité p donnée, deux évènements peuvent être indépendants alors qu'ils ne paraissent pas intuitivement indépendants.

Exemple 2.3 Prenons comme exemple le lancer simultané de deux dés: à priori, il parait raisonnable de supposer que les résultats obtenus pour chacun des deux dés n'influent pas l'un sur l'autre, et on va donc chercher une probabilité qui respecte cette indépendance. L'univers des possibles est ici $E = \{(i,j), 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$. Les résultats de chaque lancer simultané des deux dés etant équiprobables, on a donc envie de définir, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, $p(A) = \frac{\text{card}A}{36}$. Voyons maintenant si deux évènements à priori indépendants sont indépendants pour cette probabilité. Considérons par exemple l'évènement A: "obtenir un double 6"; on peut écrire: $A = B \cap C$, où B est l'évènement "obtenir un 6 sur le premier dé" et C l'évènement "obtenir un 6 sur le deuxième dé". On doit donc vérifier que: $p(A) = p(B).p(C)$. Or $B = \{(6,j), 1 \leq j \leq 6\}$ et $C = \{(i,6), 1 \leq i \leq 6\}$. On a donc $p(B) = p(C) = \frac{1}{6}$, et on a bien $p(A) = p(B).p(C)(= \frac{1}{36})$.

Pour généraliser l'indépendance des évènements à plusieurs évènements, on passe par les tribus:

Définition 2.23 (Indépendance des tribus) *Soient (E,T,p) un espace probabilisé et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de tribus incluses dans T ; on dit que les N tribus T_k $k = 1,\ldots,N$ sont indépendantes si pour toute famille $A_1,\ldots,A_N$ d'événements tels que $A_k \in T_k$ pour $k = 1,\ldots,N$ on a: $p(\cap_{k=1,N}A_k) = p(A_1)p(A_2)\ldots p(A_N)$.*

On peut facilement remarquer que si A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé (E,T,p) sont indépendants (au sens de la définition 2.22) si et seulement si les tribus $T_A = \{\emptyset, E, A, A^c\}$ et $T_B = \{\emptyset, E, B, B^c\}$ sont indépendantes. On en déduit la généralisation de la définition d'indépendance à plusieurs évènements:

Définition 2.24 (Evénements indépendants) *Soient (E,T,p) un espace probabilisé et $(A_k)_{k=1,N}$ des événements, on dit que les N événements $(A_k)_{k=1,N}$ sont indépendants si les N tribus définies par: $T_k = \{A_k, A_k^c, \mathcal{E}, \emptyset\}$ pour $k = 1, N$ sont indépendantes.*

2.5.1 Probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$

Une probabilité est définie sur un espace probabilisable quelconque. Très souvent, on ne connait du problème aléatoire que l'on cherche à modéliser ni l'ensemble E ("univers des possibles") ni la probabilité p. Par contre, on connait une "image" de la probabilité p par une application (dite mesurable, voir chapitre suivant) de E dans $\mathbb{R}$. On travaille alors avec l'espace beaucoup plus sympathique (car mieux défini...) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \tilde{p})$, ou $\tilde{p}$ est une probabilité sur $\mathcal{R}$, que les probabilistes appellent souvent "loi de probabilité". Nous donnons maintenant quelques notions propres aux lois de probabilités (ou probabilités définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$), ainsi que quelques exemples concrets utilisés dans la représentation de phénomènes aléatoires.

Définition 2.25 (Fonction de répartition) *Soit p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. On appelle fonction de répartition de la probabilité p la fonction F, définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par: $F(t) = p(]-\infty, t])$. Cette fonction est croissante et continue à droite.*

DÉMONSTRATION Utiliser les propriétés de monotonie et de continuité croissante de la mesure. ■

Théorème 2.4 *Soit F une fonction croissante et continue à droite telle que $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. Alors il existe une unique probabilité p sur $\mathcal{R}$ telle que F soit la fonction de répartition de p.*

Plus généralement, on a le théorème suivant pour les mesures:

Théorème 2.5 (Lebesgue-Stieljes) *1. Pour toute mesure m sur $\mathcal{R}$ "localement finie", i.e. telle que $m(A) < +\infty$ pour tout A intervalle borné de $\mathcal{R}$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(t) = m(]a,t])$ si $t \geq a$ et $F(t) = -m(]t,a])$ si $t \leq a$ est continue à droite et croissante.*

2. Réciproquement, pour toute fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante et continue à droite, il existe une unique mesure m sur $\mathcal{R}$ telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, t.q. $a \leq b$, on ait $m(]a,b] = F(b) - F(a)$. Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue-Stieljes associée à F.

Pour démontrer ce théorème, on introduit p^*, application définie de l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ par: $p^*(]a,b]) = F(b) - F(a)$. Nous admettrons qu'il existe un prolongement unique de cette application à $\mathcal{R}$, qui est une mesure sur $\mathcal{R}$; ceci découle du théorème de prolongement de Carathéodory.
Donnons, pour clore ce chapitre, quelques exemples de lois de probabilités et leurs fonctions de répartition associées.

Définition 2.26 (Loi discrète) *Soit p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. On dit que p est discrète si elle est purement atomique (l'ensemble de ses atomes $\mathcal{A}$ est dénombrable, voir exercice 2.12). La probabilité p s'écrit alors $p = \sum_{a \in \mathcal{A}} p(\{a\})\delta_a$, où δ_a désigne la mesure de Dirac en a. La fonction de répartition de la probabilité p est définie par: $F(t) = \sum_{a \in \mathcal{A}, a \leq t} p(\{a\})$*

Exemple 2.4 (Exemples de lois discrètes) Donnons quelques exemples de probabilités discrètes, p, sur $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{A}$ l'ensemble (dénombrable) de leurs atomes.

- La loi uniforme $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_N\}$, $p(\{a_i\}) = \frac{1}{N}$
- La loi binômiale $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$, $P \in]0,1[$, $p(\{k\}) = C_N^k P^k (1-P)^{N-k}$
- La loi de Pascal $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $P \in]0,1[$ $p(\{k\}) = P(1-P)^{k-1}$
- La loi de Poisson à paramètre λ $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $p(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Définition 2.27 (Loi discrète) *Soit p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. On dit que p est continue si sa fonction de répartition est continue.*

Exemple 2.5 (Exemple de loi continue) La plupart des exemples de probabilités continues provient de ce qu'on appelle "les mesures de densité" par rapport à la mesure de Lebesgue, pour lesquelles on a besoin de la notion d'intégrale de Lebesgue qu'on n'a pas encore introduite. On peut toutefois déjà citer l'exemple de la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$: Soient $-\infty < a < b < +\infty$; pour $A \in \mathcal{R}$, on pose $p(A) = \frac{\lambda(A \cap [a,b])}{b-a}$. On vérifie facilement que p est une probabilité appelée probabilité uniforme sur $[a,b]$.

2.6 Exercices

2.6.1 Tribus

Exercice 2.1 (Caractérisation d'une tribu)

Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et t.q. : $\emptyset \in T$; montrer que T est une tribu, c.à.d. qu'elle vérifie aussi $E \in T$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.
2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

Exercice 2.2 (Tribu engendree)

Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.
2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On définit $T_{\mathcal{A}} = \bigcap\{T, T \text{ tribu sur } E \text{ et } \mathcal{A} \subset T\}$. Montrer que $T_{\mathcal{A}}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).
3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ et $T_{\mathcal{A}}$, $T_{\mathcal{B}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{B}}$.
4. Soit E un ensemble infini et $S = \{\{x\}, x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).

Exercice 2.3 (Tribu trace)

1. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $\mathcal{T}_F = \{A \cap F;\ A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).
2. Si E est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(E)$ ($\mathcal{B}(E)$ est la tribu borélienne de E), montrer que la tribu trace sur F, notée T_F, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(F)$). [Montrer que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$. Pour montrer que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$, considérer $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (sur E) contenant les ouverts de E.] Si F est un borélien de E, montrer que T_F est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.

Exercice 2.4 (Tribus image)

Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}(F)$) on note $\sigma(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Montrer que si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F, alors $f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(B);\ B \in \mathcal{T}'\}$ est une tribu sur E (tribu image réciproque).
2. Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E, alors $\mathcal{T}' = \{B \subset F;\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu image directe).
3. Montrer que pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de F on a : $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. [*Montrer que* $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. *Puis, pour montrer que* $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$, *montrer que* $\mathcal{T} = \{G \subset F;\ f^{-1}(G) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$.]

Exercice 2.5 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^N$)

1. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. [*On pourra montrer d'abord que tout ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *est réunion dénombrable de boules ouvertes de* $\mathbb{R}^N$.]

2. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles.

3. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

4. Soit S un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent S.

Exercice 2.6 (Une tribu infinie est non dénombrable) $(\star\star)$

Montrer que toute tribu infinie T sur un ensemble (infini) E est non dénombrable. [*Si T est dénombrable, on pourra introduire, pour tout élément $x \in E$, l'ensemble $A(x)$ intersection de tous les éléments de T contenant x. Puis, montrer à l'aide de ces ensembles qu'il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans T.*]

Exercice 2.7 (Algèbre)

Soit E un ensemble. Une algèbre est une classe de parties de E contenant $\emptyset$, stable par passage au complémentaire et stable par réunion finie. Toute tribu est une algèbre et une algèbre finie est une tribu.

1. Montrer que pour toute classe $\mathcal{C}$ il existe une plus petite algèbre la contenant.

2. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de tribus de E. Montrer que $\mathcal{A} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ est une algèbre, mais n'est pas une tribu en général. Donner une suite d'algèbres finies de parties de $[0, 1]$ dont la réunion engendre $\mathcal{B}([0, 1])$.

Exercice 2.8 (Tribu engendrée par une partition)

Soit E un ensemble.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de E. Décrire la tribu engendrée par cette partition, c'est à dire par le sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les A_i. Cette tribu est-elle dénombrable?

2. Montrer que toute tribu finie de parties de E est la tribu engendrée par une partition finie de E. Quel est le cardinal d'une telle tribu?

3. $(\star)$ Montrer que si E est dénombrable, toute tribu sur E est engendrée par une partition.

2.6.2 Mesures

Exercice 2.9 (Exemples de mesures)

Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 2.10 (Mesure trace et restriction d'une mesure)

Soit (E, T, m) un espace mesuré

1. $F \in T$. Montrer que l'application $\mu : A \mapsto \mu(A) = m(A \cap F)$ est une mesure sur la tribu trace de T sur F. On l'appelera la *trace* de m sur F. Si $m(F) < \infty$, cette mesure μ est finie.

2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans T. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

Exercice 2.11

Soit (E,T,m) un espace mesuré fini ("fini" signifie que $m(E) < \infty$) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)$.
2. Montrer que $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (m(A_n) - m(B_n))$.

Exercice 2.12

Soit (E,T,m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E)$.

Exercice 2.13 (Contre exemples...)

1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?
2. Soit (E,T) un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ qui engendre T. On considère m_1 et m_2 des mesures sur T. Montrer que $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ n'implique pas que $m_1 = m_2$ sur T. [*On pourra trouver un exemple (facile) avec $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et m_1, m_2 non finies. Un exemple avec $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et m_1, m_2 finies est aussi possible mais plus difficile à trouver...*]

Exercice 2.14 (Mesure atomique, mesure diffuse)

Soit (E,T) un espace mesurable t.q. $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est diffuse si $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est purement atomique si il existe $S \in T$ t.q. $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$

1. Montrer qu'une mesure purement atomique et diffuse est nulle. Donner, pour $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ un exemple de mesure purement atomique et un exemple de mesure diffuse. [*Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est diffuse.*]
2. Soit m une mesure diffuse sur T. Montrer que tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.
3. Soit m une mesure sur T. On suppose que m est σ-finie, c'est à dire qu'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $m(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que l'ensemble des $x \in E$ t.q. $m(\{x\}) > 0$ (de tels x sont appelés "atomes" de m) est au plus dénombrable. [*On pourra introduire l'ensemble $A_{n,k} = \{x \in E_n \cap \mathcal{A};\ m(x) \geq \frac{1}{k}\}$.*]
   (b) Montrer qu'il existe une mesure diffuse m_d et une mesure purement atomique m_a sur T telles que $m = m_d + m_a$. Montrer que m_d et m_a sont étrangères, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.
   (c) Montrer que si m est finie il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à la mesure de tous les autres singletons. Montrer que ceci peut-être inexact si m n'est que σ-finie.
4. Pour $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple de mesure purement atomique finie dont l'ensemble des atomes est infini.

Exercice 2.15 (limites sup et inf d'ensembles)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On rappelle que $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq n} A_p$ et $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\geq n} A_p$.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\cup_{p\geq n_0} A_p) < \infty$. Montrer que $m(\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \leq m(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.
2. Donner un exemple (c'est à dire choisir (E, T, m) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$) pour lequel $\limsup_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) > m(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.
3. Donner un exemple avec m finie (c'est à dire $m(E) < \infty$) pour lequel
   $m(\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n) < \liminf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \limsup_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < m(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.
4. $(\star)$ (Lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$.
   Montrer que $m(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.

Exercice 2.16 (Petit ouvert dense...) $(\star\star)$

On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$, peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ? [*On rappelle qu'une partie A de R est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{A} = \mathbb{R}$ ou encore si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ t.q. $|x - a| < \varepsilon$.*]

Exercice 2.17 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ exprimant la longueur) $(\star\star)$

On définit la relation d'équivalence sur $[0, 1]$: $xRy \equiv x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble $A \subset [0, 1]$ tel que A contienne un élément et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, on définit $A_q = \{y \in [0, 1]; y = x + q \text{ ou } y = x + q - 1, x \in A, \}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} A_q = [0, 1]$.
2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0, 1]) = 1$, m ne peut pas être σ- additive. En déduire la non-existence d'une mesure m, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([a, b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En particulier, montrer que l'application λ^*, définie en cours, ne peut pas être une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.18 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $m(]a, b[) = b - a$) $(\star\star)$

Soit E un ensemble non dénombrable, sur lequel on suppose qu'il existe un ordre total, noté $\leq$, tel que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{y \in E; y \geq x\}$ est dénombrable, c.à.d. qu'il existe une application f_x injective de cet ensemble dans $\mathbb{N}$. Si $E = \mathbb{R}$ ou $E = [0, 1]$, on peut démontrer l'existence d'un tel ordre (ceci est une conséquence de l'axiome du continu). Soit m une mesure sur $\mathcal{P}(E)$; on suppose que m est finie, i.e. $m(E) < +\infty$, et diffuse. On se propose de montrer que m est nulle, i.e. $m(A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$. On pose, pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $A_{x,n} = \{y \in E; y \geq x \text{ et } f_y(x) = n\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $A_{x,n} \cap A_{x,n} = \emptyset$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{x \in E; m(A_{x,n}) \neq 0\}$ est au plus dénombrable (utiliser le fait que m est finie).
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ $m(A_{x,n}) = 0$.

3. En déduire que m est nulle (montrer pour cela que $m(E) = 0$ en utilisant la question précédente et le fait que m est diffuse).

4. Montrer qu'il n'existe pas de mesure m sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $m(]a, b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Exercice 2.19

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(I) = m(I + x)$ et $m([0, 1]) = 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = 0$ (i.e. m est diffuse). [*On pourra découper* $[0, 1]$ *en* q *intervalles de longueur* $1/q$.] En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.20

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de mesure nulle pour m. L'ensemble fermé complémentaire de cet ouvert s'appelle *le support* de m. [*Considérer les pavés à extrémités rationnelles qui sont de mesure nulle pour* m.]

Exercice 2.21 (Ensemble de Cantor)

On considère l'espace mesuré $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$.
On pose $C_0 = [0, 1]$, $a_1^0 = 0$, $b_1^0 = 1$, et $\alpha_0 = 1$. Pour $n \geq 0$, on construit $C_n \subset [0, 1]$ de la manière suivante : on suppose $C_n = \bigcup_{p=1}^{2^n} [a_p^n, b_p^n]$ connu, et on définit $C_{n+1} = \bigcup_{p=1}^{2^{n+1}} [a_p^{n+1}, b_p^{n+1}]$ où, pour $p = 1, \ldots, 2^n$, $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$, $b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \alpha_{n+1}$, $a_{2p}^{n+1} = b_p^n - \alpha_{n+1}$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, avec $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n \alpha_n}{2}$, et $0 < \rho_n < 1$. On pose $C = \cap_{n \geq 0} C_n$.

1. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$.

2. Montrer que C est compact et $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

3. Montrer que C est non dénombrable.

4. Montrer que si ρ_n ne dépend pas de n, alors $\lambda(C) = 0$. En déduire que si $A \in \mathcal{B}([0, 1])$, $\lambda(A) = 0$ n'entraîne pas que A est dénombrable.

5. Soit $0 < \epsilon < 1$. Montrer qu'il existe une suite $(\rho)_{n \geq 0} \subset]0, 1[$ telle que $\lambda(C) = \epsilon$.

6. Soit f lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $A \in \mathcal{B}([0, 1])$ est tel que $\lambda(A) = 0$, alors $\lambda(f(A)) = 0$.

7. Soit C_0 un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et C_ϵ un ensemble de Cantor de mesure $\epsilon > 0$ (cf question 5). Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. si $A \in \mathcal{B}([0, 1])$ est tel que $\lambda(A) = 0$, on n'a pas forcément $\lambda(f(A)) = 0$. [*Utiliser un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et un ensemble de Cantor de mesure* $\epsilon > 0$ *(cf question 5).*]

Exercice 2.22 (Décomposition d'une mesure signée) $(\star\star)$

Soit (E, T) un espace mesurable et m une mesure signée sur T. Pour $A \in T$, on pose : $m^+(A) = \sup\{m(B), B \in T, B \subset A\}$.

1. Montrer que l'application m^+ définie sur T est à valeurs positives.

2. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$, et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que $m^+(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m^+(A_n)$. En déduire que m^+ est une mesure positive.

3. Soit $A \in T$, on pose $\mathcal{E}_A = \{B \in T, B \subset A, \text{ t.q. } \forall C \in T, C \subset B \Rightarrow m(C) \geq 0\}$.
3.a Montrer que $m^+(A) = \sup\{m(B), B \in \mathcal{E}_A\}$. [Une méthode possible consiste à construire deux suites B_n et C_n vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (i) & B_0 = B \\ (ii) & C_k \subset B_k, \; \forall k \in \mathbb{N} \\ (iii) & m(C_k) \leq \frac{\alpha_k}{2}, \text{ où } \alpha_k = \inf\{m(C), C \subset B_k\} \forall k \in \mathbb{N} \\ (iv) & B_{k+1} = B_k \setminus C_k, \; \forall k \in \mathbb{N} \end{array} \tag{2.15}$$

On montrera ensuite que $\alpha_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, et on en déduira que $B' = B \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{E}_A$, avec $m(B') \geq m(B)$.]
3.b Montrer que $\mathcal{E}_A$ est stable par union dénombrable.
3.c Soient $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $B_n \in \mathcal{E}_A$ pour tout n, et $\lim_{n\to+\infty} m(B_n) = m^+(A)$. Montrer que $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = m^+(A)$.
3.d Déduire des trois questions précédentes que pour tout $A \in T$, il existe $A^+ \in T$ t.q. $A^+ \subset A$ et $m(A^+) = m^+(A)$, et qui vérifie de plus :

$$\forall C \in T, \, C \subset A^+ \Rightarrow m(C) \geq 0,$$
$$\forall C \in T, \, C \subset A \setminus A^+ \Rightarrow m(C) \leq 0.$$

En déduire que m^+ est une mesure positive finie.

4. Pour $A \in T$, on pose maintenant : $m^-(A) = (-m)^+(A)$ (soit encore $m^-(A) = -\inf\{m(B), B \in T, B \subset A\}$). Montrer que pour tout $A \in T$, il existe $A^- \in T$ t.q. $A^- \subset A$ et $m(A^-) = -m^-(A)$, et qui vérifie de plus :

$$\forall C \in T, \, C \subset A^-, \, m(C) \leq 0,$$
$$\forall C \in T, \, C \subset A \setminus A^-, \, m(C) \geq 0.$$

En déduire que m^- est une mesure positive finie.

5. Montrer que pour tout $A \in T$, $m(A) = m^+(A) - m^-(A)$.

Exercice 2.23 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{R}$, finie sur les bornés)

Cette exercice redémontre le théorème de régularité (théorème 2.3).

I. Soit m une mesure finie sur $\mathcal{R}$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On pose: $T = \{A \in \mathcal{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists O$ ouvert de $\mathbb{R}$, et F fermé de $\mathbb{R}$, tels que $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon\}$.

   1. Soient a et $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Montrer que $]a, b[\in T$.
   2. Montrer que T est une tribu. En déduire que m est régulière.
   3. En déduire que, $\forall A \in \mathcal{R}$, $m(A) = \inf\{m(O), O \supset A, O$ ouvert de $\mathbb{R}\}$.

II. Soit m une mesure sur $\mathcal{R}$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute partie B bornée de $\mathbb{R}$ telle que $B \in \mathcal{R}$, on a: $m(B) < +\infty$.

   Pour $B \in \mathcal{R}$, on pose: $\nu_B(A) = m(A \cap B)$, $\forall A \in \mathcal{R}$.

   1. Soit $B \in \mathcal{R}$ une partie bornée de $\mathbb{R}$; montrer que ν_B est une mesure finie.
   2. Soient $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{R}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert O_n de $\mathbb{R}$ tel que $O_n \supset A \cap]n, n+1]$ et $m(O_n) \leq m(A \cap]n, n+1]) + \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$. [*Appliquer* I.3 *avec* ν_{B_n}, B_n *ouvert borné contenant* $]n, n+1]$, *et* $A \cap]n, n+1]$.]
   3. a) Soient $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe O_n ouvert de $\mathbb{R}$ et F_n fermé de $\mathbb{R}$ t.q. $F_n \subset A \cap]n, n+1] \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$.
      b) Montrer que m est régulière. [*On pourra remarquer, en le démontrant, que si* F_n *est fermé et* $F_n \subset]n, n+1] \forall n \in \mathbb{Z}$, *alors* $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_n$ *est fermé.*]
      c) Montrer que $m(A) = \inf\{m(O), A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}$, $\forall A \in \mathcal{R}$.

III. On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{R}$. On pose $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta, x \in A\}$. Montrer que $\alpha A + \beta \in \mathcal{R}$ et que $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha| \lambda(A)$. [*On pourra commencer par étudier le cas où* A *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.] (Nous appellerons cette propriété : "Invariance par translation généralisée pour la mesure de Lebesgue".)

2.6.3 Probabilités

Exercice 2.24 Soient $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble infini dénombrable et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ t.q. $p_k \geq 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k = 1$.

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \neq \emptyset$, on peut définir $p(A) = \sum_{k; x_k \in A} p_k$. On pose $p(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que p définie en 1. est une probabilité

Exercice 2.25 (Lemme de Borel-Cantelli) Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$; on pose: $B_n = \cup_{k \geq n} A_k$ et $A = \cap_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

1. Montrer que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n) < +\infty$ alors $p(A) = 0$.
2. Montrer que si les événements A_n, $n \in \mathbb{N}$ sont indépendants et si $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n) = +\infty$, alors $p(A) = 1$.

Exercice 2.26 Soient E une "population", c.à.d. un ensemble fini,et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de "sous-populations", c.à d. un système de constituants de l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$. Soit P_n la probabilité qu'un individu de la population appartienne à la sous-population C_n, c.à.d. $p(C_n)$, où p est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$. Sachant que dans chaque sous-population la probabilité d'être gaucher est Q_n, trouver la probabilité qu'un gaucher appartienne à C_n.

Exercice 2.27 Soient S_1 (resp. S_2) un seau contenant n_1 cailloux noirs et b_1 cailloux blancs (resp. n_2 cailloux noirs et b_2 cailloux blancs). On tire au hasard, de manière équiprobable, un des deux seaux, et on tire ensuite au hasard, de manière équiprobable, un caillou dans ce seau. Sachant qu'on a tiré un caillou noir, quelle est la probabilité de l'avoir tiré du seau S_1 ?

Exercice 2.28 Soient p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ et F la fonction de répartition de p. Montrer que F est continue ssi $p(\{a\}) = 0$. En déduire que F est continue si F ne charge pas les points.

Chapter 3

Fonctions mesurables, variables aléatoires

Nous allons dans ce chapitre introduire les différents outils nécessaires à la définition de l'intégrale de Lebesgue. De la même manière que les fonctions en escalier ont été introduites lors de la définition de l'intégrale de Riemann, nous introduisons maintenant le concept de fonction étagée sur un espace mesurable (E,T). Nous introduirons ensuite les concepts de fonction mesurable et de variable aléatoire, ainsi que les premières notions de convergence de ces fonctions. La notion de variable aléatoire est fondamentale en calcul des probabilités: c'est en général par la connaissance de la variable aléatoire (et par sa "loi de probabilité") que se construit le modèle probabiliste, l'espace probabilisé (E,T,p) restant souvent mal connu.

3.1 Fonctions étagées

Définition 3.1 (Fonction caractéristique) *Soient (E,T) un espace mesurable et soit $A \in T$; on appelle fonction caractéristique de l'ensemble A, et on note 1_A la fonction définie par : $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.*

Définition 3.2 (Fonction étagée) *Soient (E,T) un espace mesurable, et f une application de E dans $\mathbb{R}$; on dit que f est T-étagée si f est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques, c.à.d. s'il existe une famille finie $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ et n réels $a_1,\ldots,a_n$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées, et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives.*

La notion de fonction étagée positive va nous permettre de définir l'intégrale à partir de la notion de mesure. On se limite pour l'instant aux fonctions positives afin de donner un sens à l'addition de mesures infinies. Notons que, dans la définition d'une fonction étagée, les ensembles A_i peuvent être d'intersection non vide. On aura besoin, pour introduire facilement la notion d'intégrale d'une fonction étagée positive, de considérer une décomposition de la fonction étagée sur des ensembles d'intersection vide. C'est l'objet du lemme suivant:

Lemme 3.1 (Décomposition canonique d'une fonction étagée positive)

Soit (E, T) un espace mesurable, et soit $f \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive, non identiquement nulle. Alors il existe une unique famille finie $(a_i, A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^\star \times T$ t.q. $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $A_i \neq \emptyset$, pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$, et $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$.

Démonstration Soient $(B_i)_{i=1,\ldots,p} \subset T$, $(b_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathbb{R}$ et $f = \displaystyle\sum_{i=1}^p b_i 1_{B_i}$ une fonction étagée positive non nulle. L'ensemble Imf des valeurs prises par f est donc fini. Comme Im$f \subset \mathbb{R}_+$, on a donc $\Im f \setminus \{0\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $0 < a_1, \ldots < a_n$. En posant $A_i = \{x \in E; f(x) = a_i\}$, on a donc $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ avec $A_i \neq \emptyset$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$. (Noter aussi que $\{x \in E; f(x) = 0\} = (\cup_{i=1}^n A_i)^c$.) Il reste à montrer que $A_i \in T$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $I_i = \{K \subset \{1, \ldots, p\}\ ;\ a_i = \sum_{k \in K} b_k\}$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i = \cup_{K \in I_i} C_K$, avec $C_K = \cap_{j=1}^p D_j$, $D_j = B_j$ si $j \in K$ et $D_j = B_j^c$ si $j \notin K$. Les propriétés de stabilité d'une tribu nous donnent alors que $A_i \in T$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc trouvée la décomposition voulue de f. Le fait que cette décomposition est unique est immédiat car on a nécessairement $\{a_1, \ldots, a_n\} = \Im f \setminus \{0\}$ et $A_i = \{x \in E; f(x) = a_i\}$. ■

On aurait envie à partir de la notion de fonction étagée positive décomposée sous la forme précédente, de définir l'intégrale de f comme $\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$.
En fait, on pourra même (cf définition 4.1) définir l'intégrale d'une fonction étagée avec une décomposition plus générale (c.à.d. non unique) grâce au lemme suivant :

Lemme 3.2 *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $f \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive non nulle, telle que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ et $f = \displaystyle\sum_{i=1}^p b_i 1_{B_i}$ où $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_p$ sont des réels strictement positifs, $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ et $(B_i)_{i=1,\ldots,p} \subset T$ sont des familles de parties disjointes deux à deux, i.e. telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors :*

$$\sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{j=1}^p b_j m(B_j). \tag{3.1}$$

Démonstration : On pose, pour $i = 1, n$ et $j = 1, p$, $C_{ij} = A_i \cap B_j$. En remarquant que $\{x; f(x) > 0\} = \cup_{i=1,n} A_i = \cup_{j=1,p} B_j$, on écrit $A_i = \bigcup_{j=1}^p C_{ij}$ et $B_j = \bigcup_{i=1}^n C_{ij}$, où $C_{ij} = A_i \cap B_j$, pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i m(C_{ij}) \tag{3.2}$$

et

$$\sum_{i=1}^p b_i m(B_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p b_j m(C_{ij}) \tag{3.3}$$

On remarque alors que $a_i = b_j$ dès que $C_{ij} \neq \emptyset$, d'où l'égalité 3.1. ■

On montrera aussi les proriétés de linéarité et de monotonie de l'intégrale des fonctions étagées (voir proposition 4.1).

3.2 Fonctions mesurables et variables aléatoires

Afin d'étendre le concept d'intégrale à une classe de fonctions plus générale que celle des fonctions étagées (positives), on introduit les fonctions mesurables (positives). Cette étape correspond au "passage à la limite" dans la définition de l'intégrale de Riemann (voir paragraphe 1.1). En fait, plus généralement, on peut développer une théorie de l'intégration pour des fonctions d'un espace mesuré à valeurs dans un espace topologique (dans lequel on a donc une notion de convergence). On rappelle qu'un espace topologique est la donnée d'un ensemble, F, et d'une famille de parties de F, appelées "ouverts de F", contenant *emptyset* et F, stable par union et stable par intersection finie. on rappelle aussi que dans un espace topologique, $x_n \to x$ quand $n \to \infty$ signifie que, pout tout O ouvert contenant x, il existe n_0 t.q. $x_n \in O$ pour tout $n \geq n_0$.

En pratique, on va surtout être intéressé par le cas $F = \mathbb{R}$ (pour lequel la topologie est donnée par la structure métrique de $\mathbb{R}$, c'est à dire par l'application "distance" définie par $d(a,b) = |b-a|$) et par le cas $F = \overline{\mathbb{R}}_+$ dont la topologie (c'est à dire la famille des ouverts) est donnée par la définition suivante.

Définition 3.3 (Ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

1. *Soit $O \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. O est un ouvert si pour tout $a \in O$ on a :*
   (a) *Si $0 < a < infty$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset O$,*
   (b) *si $a = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $[0,\alpha[\subset O$,*
   (c) *si $a = \infty$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ t.q. $]\alpha,\infty] \subset O$.*
2. *$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) engendrée par les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on peut montrer (exercice...) que $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Remarque 3.1

1. Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, A est donc un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$ si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (tribu de Borel sur $\mathbb{R}$) ou si $A = B \cup \{\infty\}$, avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On notera parfois encore $\mathcal{R}$ cette tribu.
2. La définition de la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ donne bien que, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $x_n \to \infty$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, quand $n \to \infty$) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, il existe n_0 t.q. $x_n \in]\alpha,\infty]$ pour tout $n \geq n_0$ (ce qui est la définition usuelle de convergence vers ∞).
3. On peut aussi montrer (exercice...) que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1 = \{]a,\infty];\ a \in \mathbb{R}_+\}$. C'est aussi la tribu engendrée par $\mathcal{C}_2 = \{]a,\infty[\cap\mathbb{R}_+;\ a \in \mathbb{R}\}$. Par contre, ce n'est pas la tribu engendrée (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) par $\mathcal{C}_3 = \{]a,\infty[;\ a \in \mathbb{R}_+\}$ (on a donc $T(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $T(\mathcal{C}_3) \neq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$).

On va définir maintenant la notion de mesurabilité pour une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$ ou, plus généralement, dans un espace topologique.

Définition 3.4 (Fonction T-mesurable) *Soit (E,T) un espace mesurable, une fonction f, définie de E dans F (où F est espace topologique, essentiellement $F = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$), est une fonction T-mesurable si $f^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{B}(F)$.*

Définition 3.5 (Variable aléatoire) *Soit (E,T) un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire une fonction X définie de E dans $\mathbb{R}$ et T-mesurable, i.e. telle que $X^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{R}$.*

Remarque 3.2 En l'absence d'ambiguité possible on dira "mesurable" au lieu de "T-mesurable". On remarque d'ailleurs que le terme probabiliste "variable aléatoire " ne mentionne pas la dépendance par rapport à la tribu. Dans la définition 3.5, on a noté X la variable aléatoire plutôt que f car c'est l'usage dans la littérature probabiliste.

Définition 3.6 (Tribu engendrée par une fonction mesurable)
Soient (E, T) un espace mesurable (resp. probabilisable) et f (resp. X) une fonction mesurable (resp. variable aléatoire) alors l'ensemble $\{f^{-1}(A) \in T, A \in \mathcal{R}\}$ (resp. $\{X^{-1}(A) \in T, A \in \mathcal{R}\}$) est une tribu qu'on appelle tribu engendrée par la fonction mesurable f (resp. la variable aléatoire X).

On peut remarquer que si f est une fonction mesurable de (E, T) vers $(F, \mathcal{T})$, où (E, T) et $(F, \mathcal{T})$ sont des espaces mesurables, et si m est une mesure sur T, alors on peut définir, à partir de f et m, une mesure sur $\mathcal{T}$ de la manière suivante:

Proposition 3.1 (Mesure image) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(F, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction $(T, \mathcal{T})$-mesurable. Alors l'application m_f définie de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+$ par : $m_f(A) = m(f^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{T}$ est une mesure sur $\mathcal{T}$, appelée mesure image par f.*

DÉMONSTRATION Il suffit de remarquer que m_f est bien définie, que $m_f(\emptyset) = 0$ et que m_f est $\sigma-$ additive, ce qui découle naturellement des propriétés de m. ■

Définition 3.7 (Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire)
Soient (E, T, p) un espace probabilisé, X une variable aléatoire de (E, T, p) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, on appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la probabilité p_X image de p par X, definie sur $\mathcal{R}$. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction de répartition de la loi de probabilité p_X.

Dans de nombreux cas, les modèles probabilistes seront déterminés par une loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définition 3.8 (Variables aléatoires équidistribuées)
Soient (E, T, p) et (E', T', p') des espaces probabilisé, X (resp. X') une variable aléatoire de (E, T, p) (resp. (E', T', p')) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, on dit que les variables aléatoires X et X' sont équidistribuées si elles ont même loi de probabilité.

Définition 3.9 (Variable aléatoire discrète, entière, continue) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé, X une variable aléatoire sur (E, T, p), p_X la loi de la variable aléatoire X et F_X sa fonction de répartition;*

1. *Si $X(E)$ est dénombrable, on dit que la variable aléatoire X est discrète.*
2. *Si $X(E) \subset \mathbb{N}$, on dit que la variable aléatoire X est entière.*
3. *Si la fonction de répartition F_X définie de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ est continue, on dit que la variable aléatoire est continue.*

On peut définir d'une manière plus générale la notion d'application mesurable d'un espace mesurable dans un autre espace mesurable (quelconque), ou en termes probabilistes, "d'élément aléatoire".

Définition 3.10 (Fonction $(T, \mathcal{T})$-mesurable, élément aléatoire) *Soit (E, T) et $(F, \mathcal{T})$ des espaces mesurables; une fonction f (resp. X), définie de E dans F est une fonction $(T, \mathcal{T})$-mesurable (resp. un élément aléatoire) si $f^{-1}(A) \in T$ $(X^{-1}(A) \in T)$, pour tout $A \in \mathcal{T}$. Lorsque F est un espace vectoriel, on dit que X est une variable aléatoire vectorielle ou un "vecteur aléatoire".*

3.3 Caractérisations de la mesurabilité

Définition 3.11 (espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit (E,T) un espace mesurable, on note :*

- $\mathcal{M} = \{f : E \to \mathbb{R},$ *mesurable* $\}$,
- $\mathcal{M}_+ = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+,$ *mesurable* $\}$.

Proposition 3.2 (Première caractérisation de la T-mesurabilité)
Soient $(E,\, T)$ un espace mesurable et $f : E \to F$, avec $F = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(F)$ engendrant la tribu borélienne de F. On a alors : f est mesurable si et seulement $f^{-1}(C) \in T$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. En particulier, f est mesurable si et seulement si f vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

1. $f^{-1}(]\alpha,\beta[) \in T$, *pour tout* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,
2. $f^{-1}(]\alpha,\infty[) \in T$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 3.1. Le lecteur pourra trouver lui-même d'autres caractérisations de la mesurabilité, en utilisant la proposition ci-dessus.
La proposition suivante nous permettra de définir l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}_+$ (comme limite d'intégrales de fonctions étagées, voir chapître suivant). Par contre, on ne pourra pas donner un sens, dans le cas général, à l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}$.

Proposition 3.3 (Mesurabilité positive) *Soient (E,T) un espace mesurable, et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $f \in \mathcal{M}_+$ si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, telle que :*

- *Pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$,*
- *$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $x \in E$, et tout $n \in \mathbb{N}$.*

DÉMONSTRATION : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ une suite telle que f_n tend en croissant vers f; remarquer que $f \geq 0$, et montrer que

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]\alpha,+\infty]). \tag{3.4}$$

En conclure que f est mesurable positive.
Réciproquement, soit f une fonction mesurable positive; Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{2^n} \text{ si } f(x) \in [\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{p+1}{2^n}[, p = 0,\ldots,2^{2n}-1, \\ 2^n \text{ si } f(x) \geq 2^n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Montrer que la suite des fonctions f_n ainsi définies est une suite croissante de fonctions de $\mathcal{E}_+$ qui converge vers f. ■

La proposition précédente nous donne également une deuxième caractérisation de la mesurabilité.

Proposition 3.4 ($2^{\text{ème}}$caractérisation de la T-mesurabilité) *Soient $(E,\, T)$ un espace mesurable, et $f : E \to F$, avec $F = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$, alors f est mesurable si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$, telle que, pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$.*

L'ensemble des fonctions mesurables est un ensemble très "stable", c'est-à-dire que des opérations "usuelles" (comme "addition", "multiplication", "limite"...) sur des fonctions mesurables donnent encore des fonctions mesurables, ceci est précisé dans la proposition suivante. Dans le cas (fondamental) de (E,T) $= (\mathbb{R}, \mathcal{R})$, il est "difficile" de trouver des fonctions non mesurables (comme il est "difficile" de trouver des parties non boréliennes). La construction de fonctions non mesurables nécessite, par exemple, l'utilisation de "l'axiome du choix". Il est clair que, en pratique, on peut toujours supposer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont *toutes* $\mathcal{R}$-mesurables.

Proposition 3.5 (Stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit (E,T) un espace mesurable, alors :*

- *Pour tous f, $g \in \mathcal{M}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions $f+g$, fg et αf sont encore dans $\mathcal{M}$,*
- *Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, les fonctions $\sup\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\inf\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\limsup\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\liminf\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, sont encore dans $\mathcal{M}_+$.*
- *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ une suite telle que $f_n(x) \to f(x)$ (dans $\mathbb{R}$), pour tout $x \in E$, alors $f \in \mathcal{M}$.*

La démonstration de cette proposition est immédiate par la proposition 3.4 (voir aussi exercice 3.4).

Définition 3.12 *Soient (E,T) un espace mesurable, $f \in \mathcal{M}$ une fonction mesurable. Pour tout $x \in E$, on pose :*

- $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ *;*
- $f^-(x) = -\min(f(x), 0) = (-f)^+(x)$ *;*
- $|f|(x) = |f(x)|$ *;*

Si $f \in \mathcal{M}$, alors f^+, f^- et $|f| \in \mathcal{M}_+$, $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$, voir à ce propos l'exercice 3.4.

3.4 Convergence p.p. et convergence en mesure

On introduit ici plusieurs notions de convergence de fonctions définies sur un espace mesuré à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) et on donne des liens entre ces différentes convergences. On introduit les notions équivalentes pour les variables aléatoires en langage probabiliste.

Définition 3.13 (Egalité presque partout) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, f et g des fonctions définies de E dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) ; on dit que $f = g$ m-presque partout (et on note $f = g \quad m$ p.p. , si l'ensemble $\{x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$) et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A^c$.*

On peut remarquer que si f et g sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$), dire que $f = g\,m$ p.p. revient à dire que $m(\{f \neq g\}) = 0$.
En l'absence de confusion possible, on remplace m p.p. par p.p.. Cette définition se traduit en langage probabiliste par:

Définition 3.14 (Egalité presque sûre) *Soient (E,T,p) un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires X et Y de (E,T) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$; on dit que $X = Y$ p-presque sûrement (et on note $X = Y \quad$ p.s. , si l'ensemble $\{x \in E\,;\, X(x) \neq Y(x)\}$ est négligeable.*

Définition 3.15 (Convergence presque partout) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$; on dit que f_n converge presque partout vers f ($f_n \to f$ p.p.) si il existe une partie A de E, négligeable, telle que, pour tout élément x de A^c, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

Cette définition se traduit en langage probabiliste par:

Définition 3.16 (Convergence presque sure) *Soient (E,T,p) un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire ; on dit que X_n converge presque sûrement vers X ($X_n \to X$ p.s.) si il existe une partie A de E, négligeable, telle que, pour tout élément x de A^c, la suite $(X_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $X(x)$.*

Définition 3.17 (Convergence presque uniforme) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$; on dit que f_n converge presque uniformément vers f ($f_n \to f$ p.unif.) si pour tout $\varepsilon > 0$,, il existe $A \in T$ tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur A^c.*

La convergence presque uniforme entraîne la convergence presque partout (voir exercice 3.11).
Attention, il ne faut pas confondre la notion de convergence presque uniforme définie ci-dessus avec la convergence "essentiellement uniforme", c.à.d. la convergence pour le "sup essentiel":

Définition 3.18 (sup essentiel) *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}$; on appelle sup essentiel de $|f|$, et on le note $\|f\|_\infty$, l'infimum des valeurs C telles que $|f| \leq C$ p.p. .*

Remarquons que dans le cas où $(E,T,m) = (\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$, le sup essentiel d'une fonction continue est le sup de sa valeur absolue.

Définition 3.19 (Convergence essentiellement uniforme) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$; on dit que f_n converge essentiellement uniformément vers f ($f_n \to f$ ess. unif.) si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

Il est facile de voir que la convergence essentiellement uniforme entraîne la convergence presque uniforme, mais la réciproque est fausse (voir exercice 3.12). Le théorème suivant donne, dans le cas où la mesure est finie, un résultat très important qui fait le lien entre la convergence presque partout et la convergence presque uniforme.

Théorème 3.1 (Egorov) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, tel que $m(E) < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ pp. Alors, f_n converge presque uniformément vers f.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 3.12. Attention, lorsque $m(E) = +\infty$, on peut trouver des suites de fonctions qui convergent presque partout et non presque uniformément.

Définition 3.20 (Convergence en mesure) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$; on dit que f_n converge en mesure vers f si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E \ ; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0. \tag{3.6}$$

Cette définition se traduit en langage probabiliste par:

Définition 3.21 (Convergence stochastique) *Soient (E,T,p) un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire ; on dit que X_n converge stochastiquement, ou en probabilité, vers X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} p(\{x \in X_n \ ; |X(x) - X_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0. \tag{3.7}$$

On peut montrer (cf exercice 3.10) que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $f = g\,pp$. On montre aussi que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$, et, si m est une mesure finie, $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\,g \in \mathcal{M}$. On montre à l'aide du théorème d'Egorov que si f_n converge vers f presque partout, et si $m(E) < +\infty$, alors f_n converge vers f en mesure. Réciproquement, si f_n converge vers f en mesure, alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque uniformément (et donc presque partout). Ce second résultat est vrai même si $m(E) = +\infty$) (voir exercice 3.13).

On donne maintenant un résumé des des différents types de convergence connus jusqu'à présent avec les relations existantes entre eux; les relations entre convergence presque partout et convergence en mesure (resp. convergence presque sure et convergence stochastique) sont étudiées dans l'exercice 3.13. (On en introduira bientôt encore quelques-unes...)

Terminologie "analyste"	**Terminologie "probabiliste"**
convergence simple (cs)	
convergence uniforme (cu)	
convergence presque partout (cpp)	convergence presque sure (cps)
convergence presque uniforme (cpu)	
convergence en mesure (cm)	convergence stochastique (cst)

On a les implications suivantes :

Terminologie "analyste"	**Terminologie "probabiliste"**
(cu) $\Longrightarrow$ (cs) $\Longrightarrow$ (cpp)	
(cu) $\Longrightarrow$ (cpu) $\Longrightarrow$ (cpp)	
(cpp) $\Longrightarrow$ (cpu) si la mesure est finie	
(cm) $\Longrightarrow$ (cpu) (et donc (cpp)) pour une sous-suite	(cst) $\Longrightarrow$ (cps) pour une sous-suite
(cpp) $\Longrightarrow$ (cm) si la mesure est finie	(cps) $\Longrightarrow$ (cst) si la mesure est finie.

3.5 Exercices

Exercice 3.1 (Caractérisation des fonctions mesurables) $(\star)$

Soient (E, T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\, f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu.

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{R}$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est mesurable,
   (ii) $f^{-1}(C) \in T$, pour tout $C \in \mathcal{C}$.

Exercice 3.2 (Composition de fonctions mesurables)

Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Exercice 3.3 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+\ldots$)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

Exercice 3.4 (Stabilité de $\mathcal{M}$)

1. Soient (E,T), (E',T'), (E'',T'') des espaces mesurables, f (resp. g) une application de E dans E' (resp. de E' dans E''). On suppose que f et g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de E dans E''.
2. Soit (E,T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{R}$; soient f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f^+(=\sup(f,0))$, $f^-(=-\inf(f,0))$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f+g$, fg et $|f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
3. Soient (E,T) un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$. Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.
4. Soit (E,T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables (i.e. $\exists B \subset A$; $B \notin T$). Montrer que $h = 1_B - 1_{A/B}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

Exercice 3.5 (Mesurabilité des fonctions continues)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).
2. On suppose f continue à droite (resp. gauche). Montrer que f est mesurable.
3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.

Exercice 3.6

Soit (E,T,p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur (E,T) ;

1. On prend pour X la variable aléatoire nulle, c.à.d. $X : T \to \mathbb{R}$, $X(A) = 0, \forall A \in \mathcal{T}$. Calculer la loi de probabilité p_X de X. En déduire que la connaissance de p_X ne permet pas en général de déterminer la probabilité p sur E.
2. Montrer que p_X détermine p de manière unique ssi la tribu engendrée par X, notée T_X est égale à T.

Exercice 3.7

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble E et $A \in \mathcal{A}$ tel que : $B \in \mathcal{A}$ et $B \subset A$ implique $B = \emptyset$ ou $B = A$. Montrer que toute fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) est constante sur A. En particulier si $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition, une fonction mesurable est constante sur chaque élément de la partition. Donner une fonction constante sur tout élément d'une partition mais qui ne soit pas mesurable. [Prendre comme partition de $\mathbb{R}$ tous les singletons...]

Exercice 3.8 (Egalité presque partout)

1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ λ p.p. si et seulement si $f = g$.

2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0 ; montrer que $f = g$ δ_0 p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercice 3.9

Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$). on suppose que f est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que f est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$; on définit la fonction f_n, $n > 1$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x,y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[$$

1. Montrer que f_n converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$.

2. Montrer que f_n est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $A \times B \in B(\mathbb{R}^2)$ si A, $B \in B(\mathbb{R})$.]

3. Montrer que f est mesurable.

[On pourra se contenter du cas $N = 1\ldots$]

Exercice 3.10 (Convergence en mesure) $(\star\star)$

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p..

   [*On pourra commencer par montrer que, pour tout* $\delta > 0$, $m(\{x \in E\,;\, |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$].

2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.

3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers g, alors $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\, g \in \mathcal{M}$.

   [*On pourra commencer par montrer que, si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *converge en mesure vers* $f \in \mathcal{M}$, *alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* n_0 *et* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tels que, si* $n \geq n_0$ *et* $k \geq k_0$, *on a* $m(\{x \in E\,;\, |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon$]. Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = \infty$.

Exercice 3.11 (Convergence presque uniforme et convergence presque partout)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ presque partout.

Exercice 3.12 (Théorème d'Egorov) $(\star\star)$

Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$, telles que $f_n \to f pp$ lorsque $n \to +\infty$.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{x\,;\, |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p>n} A_{p,j} \tag{3.8}$$

1. Montrer que à j fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$

2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov

   [*On cherchera A sous la forme :* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} B_{n_j,j}$, *avec un choix judicieux de* n_j.]

3. Montrer, par un contre exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.

4. Montrer, par un contre exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(E) = +\infty$.

Exercice 3.13 (Convergence en mesure et convergence presque partout)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0. \tag{3.9}$$

1. On suppose ici que $m(E) < +\infty$.

   (a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f en mesure [*Utiliser le théorème d'Egorov.*]

   (b) Montrer par un contrexemple que la réciproque de la question (a) est fausse.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure si :

   $$\forall\, \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}; p, q \geq n \Longrightarrow m(\{x \in E; |f_p(x) - f_q(x)| > \varepsilon\} \leq \delta. \tag{3.10}$$

   Montrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy en mesure ; montrer qu'il existe une fonction mesurable g et une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in T$ vérifiant $m(A) \leq \varepsilon$ et tel que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur A^c. [*On pourra construire la sous-suite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de telle sorte que* $m(A_k) \leq 2^{-k}$, *avec* $A_k = \{x \in E; |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 2^{-k}\}$, *et chercher A sous la forme* $\bigcup_{k\geq p} A_k$, *où p est convenablement choisi.*]

4. En déduire que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f, il existe une sous-suite qui converge vers f presque partout. [*On pourra commencer par montrer que la suite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *construite en 4. converge presque partout et en mesure.*]

Exercice 3.14

Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, on pose, pour f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$:

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} dm$$

1. Montrer que d est une semi-distance sur l'espace des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que f_n converge en mesure vers f lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$. [*Il est probablement utile de considérer, pour* $\varepsilon > 0$, *les ensembles* $A_n = \{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$.]

Exercice 3.15

Soit $\mathcal{A}$ la classe des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ tels que

$$\text{pour } n > 0, \quad 2n \in A \Longleftrightarrow 2n+1 \in A.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
2. Montrer que l'application $\varphi : n \mapsto n+2$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, mesurable quand $\mathbb{Z}$ est muni (au départ et à l'arrivée) de la tribu $\mathcal{A}$ (c'est à dire t.q. que $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$). Montrer que l'inverse de φ n'est pas mesurable.

Exercice 3.16

On considère des applications f de E dans $\mathbb{R}$. On note $\sigma(f) = \{f^{-1}(A);\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

1. Décrire $\sigma(f)$ dans chacun des cas suivants:
   (a) $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$ ou $f(x) = x^2$ ou $f(x) = |x|$.
   (b) $E = \mathbb{R}^2$ et $f(x,y) = x + y$.
2. Montrer que les singletons sont tous dans $\sigma(f)$ si et seulement si f est injective.
3. Dans le cas général, montrer qu'une fonction g de E dans $\mathbb{R}$ est $\sigma(f)$-mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g = \varphi \circ f$. [On pourra commencer par le cas où g est étagée, puis utiliser un argument de limite].
4. Montrer que l'on a toujours une fonction bornée g telle que $\sigma(g) = \sigma(f)$.

Exercice 3.17

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours quand on ne le précise pas, de la tribu borélienne). Pour $a > 0$, on définit la fonction "tronquée" :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad f(x) > a \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \le a \\ -a & \text{si} \quad f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

Exercice 3.18

Soit (E, T) un espace mesurable (on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, comme toujours). Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et A l'ensemble des points $x \in E$ tels que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas de Cauchy. Montrer que A est mesurable (i.e. $A \in T$).

Exercice 3.19

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_\varphi(x) = \varphi(x, x)$.

1. Montrer que f_φ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.
2. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables. Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2-p.p. $\not\Longrightarrow f_\varphi = f_\psi$ λ-p.p.. (λ_2 est la mesure de lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dont on suppose l'existence).
3. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables t.q. :

   (a) $\varphi(x, .)$ et $\psi(x, .)$ sont continues p.p. en $x \in \mathbb{R}$

   (b) $\varphi(, .y)$ et $\psi(., y)$ sont mesurables pour tout $y \in \mathbb{R}$

   (Ces fonctions sont dites de "Carathéodory".)

   (a) Montrer que φ et ψ sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables.

   (b) Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2-p.p. $\Longrightarrow \varphi(x, .) = \psi(x, .)$ partout, p.p. en $x \in \mathbb{R}$. En déduire que si $\varphi = \psi$ λ_2-p.p, alors $f_\varphi = f_\psi$ λ-p.p..

Chapter 4

Fonctions intégrables

Maintenant qu'on a construit un espace mesuré (E, T, m) (dont un exemple fondamental est $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$, on voudrait généraliser la notion d'intégrale à cet espace, c.à.d. introduire une application qui à f, fonction de E dans $\mathbb{R}$, associe un réel, dépendant de la mesure m, que nous noterons $\int f dm$, tel que:

- Si $f = 1_A$, $A \in T$, alors $\int f dm = m(A)$,
- L'application ainsi définie soit linéaire, c.à.d. que pour toutes fonctions f et g définies de E dans $\mathbb{R}$, $\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$, $\forall$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

En fait, on ne peut pas définir une telle application sur *toutes* les fonctions de E dans $\mathbb{R}$, nous allons la définir seulement sur les fonctions que nous appellerons "intégrables".

4.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Définition 4.1 (Intégrale d'une fonction de $\mathcal{E}_+$) *Soit (E, T, m) un espace mesuré, et soit f de E dans $\mathbb{R}$ une fonction étagée positive non nulle ; soient $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ une famille de parties disjointes deux à deux (i.e. telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), et n réels $a_1, ..., a_n$ strictement positifs tels que $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. On définit l'intégrale de f, qu'on note $\int f dm$ par : $\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$. D'autre part, si $f = O$, on pose $\int f dm = 0$.*

Notons que cette définition est cohérente grâce au lemme 3.2 qui nous permet d'affirmer que, pour une fontion étagée positive qu'on écrit sous la forme: $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, où les A_i sont deux à deux disjoints, la valeur $\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ est indépendante de la décomposition choisie.

Remarque 4.1 En adoptant la convention $0 \times +\infty = 0$, on peut aussi remarquer que si $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, où la famille $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ est telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$,et où les réels $a_1, ..., a_n$ sont supposés positifs seulement, on a encore :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i). \tag{4.1}$$

Proposition 4.1 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{E}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, alors :*

- *linéarité positive :* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}_+$, *et* $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,
- *monotonie :* $f \geq g \Rightarrow \int f dm \geq \int g dm$.

DÉMONSTRATION :
Il est facile de montrer que si $f \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ on a $\int \alpha f dm = \alpha \int f dm$. Pour montrer la linéarité positive, il suffit donc de considérer le cas $\alpha = \beta = 1$ et f et g non nulles. Soit donc f, $g \in \mathcal{E}_+$, non nulles. D'après la proposition sur la décomposition canonique des fonctions étagées positives non nulles (proposition 3.1), on peut écrire $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ avec $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $A_i \neq \emptyset$ pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $0 < b_1 < \ldots < b_m$, $B_j \neq \emptyset$ pour tout j, $B_j \cap B_i = \emptyset$ si $j \neq i$. En posant $a_0 = b_0 = 0$, $A_0 = (\cup_{i=1}^n A_i)^c)$ et $B_0 = (\cup_{j=1}^n B_j)^c)$, on a aussi $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{A_i}$, $g = \sum_{j=0}^m b_j 1_{B_j}$ et on peut écrire $f + g = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j} \sum_{(i,j) \in K} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j}$, avec $K = \{(i,j) \in \{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\} \setminus (0,0)\}$.
On a donc $\int (f+g) dm = \sum_{(i,j) \in K} (a_i + b_j) m(A_i \cap B_j)$. On en déduit $\int (f+g) dm = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m a_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n b_j m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) + \sum_{j=1}^m b_j m(B_j)$ (car $(A_0, \ldots, A_n)$ et $(B_0, \ldots, B_m)$ sont des partitions de E). On a donc bien montré $\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm$.

Il reste à montrer la monotonie. Soit f, $g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f \geq g$. On a donc $f - g \in \mathcal{E}_+$ et donc la linéarité positive nous donne que $\int f dm = \int (f-g) dm + \int g dm \geq \int g dm$ car $\int (f-g) dm \geq 0$.

■

Remarque 4.2 Une conséquence directe de la linéarité est que, si $f \in \mathcal{E}_+$, pour n'importe quelle décomposition de f : $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, $a_1, ..., a_n \geq 0$ et $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ (on ne suppose plus $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a encore, par linéarité,

$$\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i \int 1_{A_i} = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i), \tag{4.2}$$

en posant $a_i m(A_i) = 0$ *si* $a_i = 0$.

4.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On donne maintenant un petit lemme fondamental qui va permettre de définir l'intégrale des fonctions de $\mathcal{M}_+$.

Lemme 4.1 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, *et* $g \in \mathcal{E}_+$, *tels que :*

- $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et tout* $x \in E$,
- $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \geq g(x)$, *pour tout* $x \in E$,

alors

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, dm \geq \int g \, dm. \tag{4.3}$$

DÉMONSTRATION : On pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, et pour $\alpha \in [0,1[$, on définit :

$$A_n = \{x \in E\,;\, \alpha g(x) \le f_n(x)\}. \tag{4.4}$$

1. Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de T, telle que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E. \tag{4.5}$$

En déduire que $g1_{A_n} \in \mathcal{E}_+$ et que $\lim_{n\to+\infty} \int g\, 1_{A_n} dm = \int g\, dm$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \int g1_{A_n}\, dm \le \int f_n\, dm$. En déduire l'inégalité 4.3. ■

Soient (E,T,m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}_+$. Soient deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}_+$ convergeant simplement et en croissant vers f, le lemme 4.1 et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ permet(tent) d'affirmer que :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dm = \lim_{n\to\infty} \int g_n(x)dm, \tag{4.6}$$

et donc de définir l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.2 (Intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}_+$. D'après la proposition sur la mesurabilité positive, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que :*

- *Pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$,*
- *$f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$, pour tout $x \in E$, et tout $n \in \mathbb{N}$.*

On définit l'intégrale de f en posant :

$$\int f dm = \lim_{n\to\infty} \int f_n dm \quad (\in \overline{\mathbb{R}}_+). \tag{4.7}$$

On a aussi la caractérisation suivante, parfois bien utile, de l'intégrale d'une fonction mesurable positive à partir d'intégrales de fonctions étagées positives:

Lemme 4.2 *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$; alors $\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f\}$.*

DÉMONSTRATION : Le sens $\le$ est évident. Pour montrer le sens $\ge$, utiliser le lemme 4.1. ■

Proposition 4.2 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{M}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, alors :*

- *linéarité positive : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_+$, et $\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,*
- *monotonie : $f \ge g \Rightarrow \int f dm \ge \int g dm$.*

Ces propriétés se démontrent de manière très simple à partir de la proposition analogue sur $\mathcal{E}_+$ (proposition 4.1). On utilise la caractérisation des fonctions de $\mathcal{M}_+$ comme limites croissantes de fonctions de $\mathcal{E}_+$ (cf proposition 3.4) pour montrer la linéarité positive et le lemme 4.2 pour montrer la monotonie.

Remarque 4.3 (A propos de $0 \times \infty \ldots$) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. Soit I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A, définie de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par : $I_A(x) = +\infty$ si $x \in A$ et $I_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Cette fonction est souvent notée aussi $\infty 1_A$. Il est clair que $I_A \in \mathcal{M}_+$ et que I_A est la limite croissante de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ définie par $f_n = n1_A$. On en déduit, en utilisant la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int I_A dm = 0$.

Une conséquence de cette remarque est le lemme suivant :

Lemme 4.3 *Soit (E, T, m) un espace mesuré*

1. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. Alors, $\int_A f dm = \int f 1_A dm = 0$.*
2. *Soit f, $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors, $\int f dm = \int g dm$.*

DÉMONSTRATION :
Démonstration de 1. Soit I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A (cf remarque 4.3. On a évidemment $f 1_A \le I_A$ et donc, par monotonie, $\int f 1_A dm = 0$.
Démonstration de 2. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f 1_{A^c} = g 1_{A^c}$. On a donc $f 1_{A^c}$, $1_{A^c} \in \mathcal{M}_+$ et $\int f 1_{A^c} dm = \int g 1_{A^c} dm$. D'autre part, comme $\int f 1_A dm = \int g 1_A dm = 0$, on a aussi, par linéraité positive $\int f dm = \int f 1_{A^c} dm + \int f 1_A dm = \int f 1_{A^c} dm$ (et de même pour g). Donc, $\int f dm = \int g dm$.

■

Ce lemme nous permet d'étendre la définition de l'intégrale à certaines fonctions non mesurables :

Définition 4.3 *Soit (E, T, m) un espace mesuré et f définie sur A^c, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+$), avec $A \in T$, $m(A) = 0$.*

1. *f est m-mesurable (resp. m-mesurable positive) si il existe $g \in \mathcal{M}$ (resp. $g \in \mathcal{M}_+$) t.q. $f = g$ p.p..*
2. *Soit f m-mesurable positive. On pose $\int f dm = \int g dm$, avec $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p. (noter que cette intégrale ne dépend pas du choix de g, grâce au lemme 4.3.*

Remarque 4.4 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Il est facile (exercice...) de montrer les 2 résultats suivants :

1. Soit f de E dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, $f \in \mathcal{E}_+$ si et seulement si $f \in \mathcal{M}_+$, $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im} f) < \infty$.
2. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\mathbb{R}$. Alors, f est m-mesurable si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p..
3. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, f est m-mesurable positive si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Le résultat suivant sera souvent utile par la suite. En particulier, les célèbres inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebichev (voir section 4.9) en découlent immédiatement.

Lemme 4.4 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$ et soit $t \in \mathbb{R}_+^*$; alors :*

$$m(\{f \ge t\}) \le \frac{1}{t} \int f dm. \tag{4.8}$$

DÉMONSTRATION : On définit $A_t = \{f \ge t\} = \{x \in E \; ; \; f(x) \ge t\}$ alors : $f \ge t 1_{A_t}$; par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit l'inégalité 4.4 ■

4.3 Mesures et probabilités de densité

4.3.1 Définitions

A partir de la mesure de Lebesgue λ et de n'importe quelle fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

Définition 4.4 (Mesure de densité) *Soit (E, T) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_+$; on définit $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :*

$$m(A) = \int f 1_A d\lambda = \int_A f d\lambda, \quad \forall A \in T. \tag{4.9}$$

L'application m ainsi définie est une mesure sur T, appelée mesure de densité f par rapport à λ, et notée $m = f\lambda$, ou encore $dm = f d\lambda$.

Proposition 4.3 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}^+$ et m_f la mesure de densité f par rapport à m; alors la mesure m_f est absolument continue par rapport à la mesure m, c.à.d. que si $A \in T$ est tel que $m(A) = 0$, alors $m_f(A) = 0$.*

DÉMONSTRATION Ecrire f comme limite croissante de fonctions étagées positives et utiliser la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}^+$. ■

On déduit de cette proposition que la mesure de Dirac définie par :

$$\begin{array}{l} \delta(A) = 1 \text{ si } 0 \in A \\ \delta(A) = 0 \text{ si } 0 \in A^c. \end{array} \tag{4.10}$$

n'est pas une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (on peut montrer que ces deux mesures sont étrangères (voir définition 2.16 et proposition 2.2).
Notons que l'on peut aussi définir des mesures signées de densité : soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$. Pour tout borélien $A \in \mathcal{R}$, on pose : $m(A) = \displaystyle\int f 1_A d\lambda$. L'application m ainsi définie est une mesure signée sur $\mathcal{R}$, appelée mesure de densité f par rapport à λ.

4.3.2 Exemples de probabilités de densité

Définition 4.5 (Probabilité de densité) *Soit p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, on dit que p est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) s'il existe $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\int f d\lambda = 1$ et $p(A) = \int f 1_A d\lambda = \int_A f d\lambda, \quad \forall A \in \mathcal{R}$.*
Les lois de probabilité de densité suivantes seront souvent utilisées dans le calcul des probabilités (On rappelle qu'une loi de probabilité est, par définition, une probabilité sur $\mathcal{R}$) :

1. Loi uniforme Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la loi uniforme sur $[a, b]$ est la loi de densité $\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}$: $p(A) = \int 1_{[a,b]} 1_A d\lambda$, $\forall A \in \mathcal{T}$.

2. Loi exponentielle Soit $\tau > 0$; la loi exponentielle est définie par la densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \tau e^{-\tau x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

3. Loi de Gauss Soient $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$; la loi de Gauss est définie par la densité f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4.12}$$

4.4 Convergence monotone et lemme de Fatou (dans $\mathcal{M}_+$)

Théorème 4.1 (Convergence Monotone) *Soit (E, T, m) un espace mesuré, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telle que $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$. On pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et : $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION : Remarquer d'abord que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ converge en croissant vers f, alors par la proposition 3.5, $f \in \mathcal{M}_+$, et par monotonie de l'intégrale,

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \leq \int f\, dm. \tag{4.13}$$

Il reste donc à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \geq \int f\, dm. \tag{4.14}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{M}_+$; il existe donc une suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, qui converge en croissant vers f_n lorsque p tend vers $+\infty$. On définit alors :

$$g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p} \tag{4.15}$$

1. Montrer que les fonctions g_p ainsi définies forment une suite croissante de fonctions de $\mathcal{E}_+$, telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g_p \leq f_p$.
2. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} g_p = f$, et en déduire, en utilisant la question 1., l'inégalité 4.14. ■

Remarque 4.5 *On utilisera souvent une légère extension (facile) du théorème de convergence monotone. Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On suppose que pour presque tout $x \in E$ la suite $(f_n(x))n \in \mathbb{N}$ converge en croissant vers $f(x)$. La fonction f (définie p.p.) est alors $m-$mesurable positive (p.p.) et $\int f_n dm \to \int f dm$.*

Corollaire 4.1 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$; on pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et $\int f dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n dm$.*

DÉMONSTRATION : Appliquer le théorème de convergence monotone à la fonction $S_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$. ■

Lemme 4.5 (Fatou) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On pose pour tout $x \in E$: $f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} f_p(x)) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et :*

$$\int f dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm). \tag{4.16}$$

DÉMONSTRATION : Appliquer le théorème de convergence monotone à la fonction $g_n = \inf_{p \geq n} f_p$. ∎

Le lemme de Fatou est souvent utilisé avec des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telles que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour presque tout $x \in E$. Il permet alors de montrer que la limite (au sens de la convergence *pp*) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est "intégrable" (voir les paragraphes suivants) ; on utilise alors le corollaire (immédiat) suivant :

Corollaire 4.2 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$, pour presque tout $x \in E$, lorsque $n \to +\infty$. On suppose qu'il existe $C \geq 0$ t.q. $\displaystyle\int f_n \, dm \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, f est $m-$mesurable positive (p.p.) et $\displaystyle\int f \, dm \leq C$.*

4.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Définition 4.6 (Intégrale de Lebesgue) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f est intégrable au sens de Lebesgue si $\displaystyle\int |f| dm < +\infty$. Dans ce cas, on a aussi $\displaystyle\int f^+ dm < +\infty$ et $\displaystyle\int f^- dm < +\infty$. On pose alors :*

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm (\in \mathbb{R}). \tag{4.17}$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^1$) l'ensemble des fonctions intégrables.

Proposition 4.4 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$)

1. *$\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel.*
2. *L'application $f \mapsto \displaystyle\int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.*
3. *Monotonie : soient f et $g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \leq g$; alors $\displaystyle\int f dm \leq \int g dm$*

DÉMONSTRATION : Les points *1.* et *3.* sont faciles. Pour montrer le point *2.*, on pourra utiliser les deux décompositions de $\alpha f + \beta g$: $\alpha f + \beta g = (\alpha f + \beta g)^+ + (\alpha f + \beta g)^-$ et $\alpha f + \beta g = \alpha(f^+ + f^-) + \beta(g^+ + g^-)$, et se ramener à l'intégrale des fonctions mesurables positives. ∎

On peut définir sur $\mathcal{L}^1$ une semi-norme de la manière suivante :

Définition 4.7 (Semi-norme sur $\mathcal{L}^1$) *Soit (E, T, m) un espace mesuré, $f \in \mathcal{L}^1$ une fonction intégrable. On pose :*

$$\|f\|_1 = \int |f| dm \tag{4.18}$$

L'application de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}_1$.

4.6 L'espace L^1

Proposition 4.5 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Alors $\int f dm = 0 \Leftrightarrow f = 0$ pp.*

DÉMONSTRATION :

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$, $f = 0$ p.p. . Montrer, en utilisant la monotonie de l'intégrale, que $\int f dm = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ telle que $\int f dm = 0$. Utiliser le lemme 4.4 pour montrer que $m(\{f \neq 0\}) = 0$. ■

Corollaire 4.3 *Soient f et $g \in \mathcal{L}^1$. Si $f = g$ pp, alors :*

$$\int f dm = \int g dm. \tag{4.19}$$

DÉMONSTRATION : Remarquer que si $h \in \mathcal{L}^1$, alors $|\int h dm| \leq \int |h| dm$ et utiliser la proposition 4.5. ■

On peut maintenant définir une relation d'équivalence, notée $(= pp)$, sur $\mathcal{L}^1$ par :

$$f \ \ (= pp) \ \ g \text{ si } f = g \ \ pp \tag{4.20}$$

Définition 4.8 (L^1) *On définit l'ensemble $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ des classes d'équivalence de la relation $(= pp)$ définie sur $\mathcal{L}^1$, i.e. $L^1 = \mathcal{L}^1/(= pp)$.*

Définition 4.9 (Intégrale sur L^1) *Soit $\tilde{f} \in L^1$, et $f \in \mathcal{L}^1$ un représentant de la classe $\tilde{f}$. On pose :*

$$\int \tilde{f} dm = \int f dm. \tag{4.21}$$

Le lecteur (attentif...) vérifiera facilement que cette définition a un sens en montrant que l'intégrale ainsi définie ne dépend pas du choix du représentant dans la classe d'équivalence.

Définition 4.10 (Structure vectorielle sur L^1) *On munit L^1 d'une structure vectorielle en posant, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in (L^1)^2$:*

$$\alpha \widetilde{f + \beta} g = \alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g} \tag{4.22}$$

Définition 4.11 (Norme sur L^1) *Soit $\tilde{f} \in L^1$; on pose $\|\tilde{f}\|_1 = \|f\|_1$. L'application $\tilde{f} \mapsto \|\tilde{f}\|_1$ est une norme sur L^1. L'espace $(L^1, \|.\|_1)$ est donc un espace vectoriel normé.*

Le lecteur (toujours attentif...) vérifiera facilement que cette définition a un sens en montrant que la norme ainsi définie ne dépend pas du choix du représentant dans la classe d'équivalence.
En fait, on confondra dans la suite un élement $\tilde{f}$ avec un représentant f de la classe d'équivalence $\tilde{f}$. De manière plus générale, on dira qu'une fonction f définie d'une partie A de E, de complémentaire A^c négligeable, dans $\mathbb{R}$, est un élément de L^1 si il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ telle que $f = g$ *pp* ; on confond donc en fait la fonction f avec la classe d'équivalence $\tilde{g}$, et on pose $\int f dm = \int g dm$.
On remarquera que si f et g sont des élements de L^1, $f = g$ signifie en fait $f = g$ *pp*.

Théorème 4.2 (Riesz-Fisher) *L^1 est un espace de Banach.*
DÉMONSTRATION. On montrera au paragraphe suivant que, dans L^1, toute série absolument convergente est convergente (cf théorème 4.5) ; on en déduit que $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach. ■

On n'a évidemment pas de notion de convergence simple des "fonctions" de L^1, mais la notion de convergence *pp*, vue précédemment, se généralise aux fonctions de L^1 :

Définition 4.12 (Convergence presque partout pour les fonctions de L^1) *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$; on dit que f_n converge presque partout vers f ($f_n \to f$ pp) si il existe une partie A de E, négligeable, telle que, pour tout élément x de A^c, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

On peut aussi introduire la notion de convergence en mesure pour les fonctions L^1 :

Définition 4.13 (Convergence en mesure pour les fonctions de L^1) *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$; on dit que f_n converge en mesure vers f si $\forall\varepsilon > 0$, $mes(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

On peut vérifier facilement que les deux définitions précédentes sont correctes car elles ne dépendent pas du représentant choisi dans la classe d'équivalence, c.à.d. : si $f_n \to f$ *pp* (resp. en mesure), $f_n = g_n$ *pp* et $f = g$ *pp*, alors $g_n \to g$ *pp* (resp. en mesure).
On peut démontrer (exercice... s'inspirer de la démonstration du théorème 4.6) que si une suite de fonctions de L^1 converge en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout. Dans le cas où la mesure m est finie, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

Remarque 4.6 Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $(E, \overline{T}, \overline{m})$ son complété (cf définition 2.15 et exercice 2.15). L'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est "identique" à l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, il existe une bijection évidente entre ces deux espaces en remarquant que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, alors il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ telle que $f = g\,pp$ (voir à ce propos l'exercice 4.6).

Pour montrer qu'une fonction est dans L^1 on utilise souvent le lemme de Fatou de la manière suivante (voir l'exercice 4.17 pour la démonstration, qui est en fait une conséquence facile du lemme de Fatou pour les fonctions mesurables positives, cf lemme 4.5) :

Lemme 4.6 (Fatou-L^1) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que :*

1. *$f_n \geq 0$ pp, $\forall n \in \mathbb{N}$,*
2. *$\exists C$, $\int f_n dm \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$,*
3. *$f_n \to f$ pp, quand $n \to \infty$,*

alors $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, et $\int |f| dm \leq C$.

On peut également montrer qu'une fonction est dans L^1 en utilisant le théorème de convergence monotone. Ceci est précisé dans le théorème 4.3 (dit théorème de Beppo-Lévi) (qui donne aussi un résultat de convergence dans L^1).

4.7 Théorèmes de convergence dans L^1

Nous connaissons à présent trois notions de convergence pour les fonctions de L^1, les notions de convergence presque partout et convergence en mesure introduites ci-dessus, et la notion de convergence habituelle dans un espace normé, c.à.d., ici, la convergence pour la norme L^1. On appelle convergence dans L^1 la convergence au sens de la norme L^1. On peut montrer par des contre-exemples que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, et que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout. Pour montrer que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, on peut considérer l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ définie par : $f_n(x) = n\, 1_{]0,\frac{1}{n}]}$. On a évidemment $f_n \to 0$ pp, alors que $\|f_n\|_1 = 1$. Pour montrer que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout, on considère à nouveau l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$, et on construit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ (dite "bosse glissante") définie par : $f_{n+k}(x) = 1_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}$, pour $n = \frac{p(p-1)}{2}$, $p \in \mathbb{N}$ et $1 \le k \le n$. On peut voir facilement que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{p}$ pour $n \in [\frac{p(p-1)}{2}, \frac{p(p+1)}{2}[$, alors que $f_n \not\to 0$ pp (par contre, on peut noter qu'il est possible d'extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge presque partout vers 0). Le théorème de convergence dominée, énoncé ci-après, donne une hypothèse suffisante pour qu'une suite (de fonctions) convergeant presque partout converge aussi dans L^1.

4.7.1 Convergence presque partout et convergence dans L^1

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de convergence monotone et permet de montrer la convergence dans L^1 d'une suite monotone de fonctions convergeant presque partout.

Théorème 4.3 (Beppo-Lévi) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que :*

1. *$f_{n+1} \ge f_n$ pp, $\forall n \in \mathbb{N}$, [ou $f_{n+1} \le f_n$ pp, $\forall n \in \mathbb{N}$],*
2. *$f_n \to f$ pp, quand $n \to \infty$,*

alors :

1. *$f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}$,*
2. *Si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, alors $f_n \to f$ dans L^1.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.18.
Nous allons maintenant voir un résutat fondamental, conséquence du lemme de Fatou, qui permet de prouver la convergence de suites dans L^1 sans hypothèse de convergence monotone.

Théorème 4.4 (Convergence dominée) *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ telles que :*

1. *$f_n \to f$ pp,*
2. *$\exists F \in L^1$; $|f_n| \le F$ pp, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.*

Alors $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 (c.à.d. $\int |f_n - f| dm \to 0$ lorsque $n \to +\infty$). Ceci donne aussi $\int f_n dm \to \int f dm$, lorsque $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION : Appliquer le lemme de Fatou (dans L^1) à la fonction $h_n = 2F - |f_n - f|$, en remarquant que h_n est $m-$mesurable positive. ■

On va maintenant montrer que l'espace $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach, en montrant que toute série absolument convergente dans L^1 (i.e. telle que la série des normes converge) est convergente dans L^1. On en déduira un résultat très important (le théorème 4.6) qui permet d'extraire d'une suite convergeant dans L^1 une sous-suite convergeant presque partout. On aura besoin au cours de la démonstration du petit résultat (immédiat, voir à ce propos l'exercice 4.6) suivant :

Lemme 4.7 *Si $f \in L^1$, alors $f < +\infty$ pp.*

Théorème 4.5 (Séries absolument convergentes dans L^1) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty$; alors :*

1. *$\exists F \in L^1$; $|\sum_{p=0}^{n} f_p| \leq F$ pp, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*
2. *La série de terme général $f_n(x)$ est, pour presque tout $x \in E$, convergente.*

   On définit f par $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ (de sorte que f est définie pp).
3. *$f \in L^1$; $\sum_{p=0}^{n} f_p \to f$ dans L^1 et pp, quand $n \to \infty$.*

DÉMONSTRATION Pour $x \in E$, on définit : $F(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} |f_p(x)|$ (qui existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). Montrer, en utilisant le théorème de convergence monotone, que $F \in L^1$ et $F < +\infty$ pp. En déduire que la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et donc convergente. Appliquer alors le théorème de convergence dominée à $h_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$. ■

Théorème 4.6 (Réciproque partielle du théorème de CD) *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$ telles que $f_n \to f$ dans L^1, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et $F \in L^1$ telles que :*

1. *$f_{n_k} \to f$ pp,*
2. *$|f_{n_k}| \leq F$ pp, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.*

DÉMONSTRATION. En utilisant le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^1, construire par récurrence une suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $n_{k+1} > n_k$ et si $p, q \geq n_k$, $\|f_p - f_q\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$. Appliquer ensuite le théorème 4.5 à la série de terme général $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$. ■

On donne maintenant le théorème de Vitali, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de convergence dans L^1. La démonstration de ce théorème ainsi que des petits résultats préliminaires qu'elle nécessite font l'objet des exercices 4.20 et 4.21.

Proposition 4.6 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$; alors :*

1. $\forall \ \ \varepsilon > 0, \ \ \exists \ \ \delta > 0 \ \ ; \ \ \forall A \in T, m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon.$

2. $\forall \ \ \varepsilon > 0, \ \ \exists \ \ C \in T, \ \ m(C) < +\infty \ \ ; \int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon.$

Théorème 4.7 (Vitali) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f_n \to f$ *p.p.. Alors,* $f \in L^1$ *et* $f_n \to f$ *dans* L^1 *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *(equi-intégrabilité)* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ ; \forall \ \ A \in T, \forall \ \ n \in \mathbb{N}, m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f_n| dm \leq \varepsilon$

2. *("equi-médiocrité à l'infini")* $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in T, m(C) < +\infty \ \ ; \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon.$

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.7 ; elle ne nécessite pas le théorème de convergence dominée: on utilise le théorème d'Egorov (cf théorème 3.1 et exercice 3.1) On peut aussi remarquer que le théorème de convergence dominée est une conséquence du théorème de Vitali (cf exercice 4.21).

4.7.2 Convergence en mesure et convergence dans L^1

Lemme 4.8 (Fatou pour la convergence en mesure)
Soient (E, T, m) *un espace mesuré, et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*. On suppose que :*

1. $f_n \geq 0$ *pp,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

2. $\exists C$, $\int f_n dm \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

3. f_n *converge en mesure vers* f*, quand* $n \to \infty$,

alors $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*, et* $\int |f| dm \leq C$.

Théorème 4.8 (Vitali pour la convergence en mesure)
Soient (E, T, m) *un espace mesuré ,* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1$*,* $f \in L^1$*, telles que* f_n *converge en mesure vers* f*. Alors,* $f_n \to f$ *dans* L^1 *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *(equi-intégrabilité)* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ ; \forall \ \ A \in T, \forall \ \ n \in \mathbb{N}, m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f_n| dm \leq \varepsilon$

2. *("equi-médiocrité à l'infini")* $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in T, m(C) < +\infty \ \ ; \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon.$

4.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Soient (E, T, m) un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; à $t \in \mathbb{R}$ fixé, on définit l'application $f(., t) : E \to \mathbb{R}$, qui à x associe $f(x, t)$. On suppose que l'application $f(., t)$ ainsi définie vérifie l'hypothèse suivante :

$$f(., t) \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.23}$$

et on note F l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int f(., t) dm = \int f(x, t) dm(x). \tag{4.24}$$

Théorème 4.9 (Continuité sous $\int$) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, f une fonction de $E\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.23) et $t_0\in\mathbb{R}$; on suppose de plus que :*

1. *l'application $f(x,.)$, définie pour presque tout $x\in E$ par : $t\mapsto f(x,t)$, est continue en t_0, pour presque tout $x\in E$;*
2. *$\exists\ \ \varepsilon>0$ et $\exists\ \ G\in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ tels que $|f(.,t)|\le G\ \ pp, \forall\ \ t\in]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$.*

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t)=\displaystyle\int f(.,t)dm=\int f(x,t)dm(x)$, est continue en t_0.

DÉMONSTRATION : Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$, telle que $t_n\to t_0$ lorsque $n\to+\infty$. Soit f_n définie par $f_n(x)=f(E,T_n)$. Appliquer le théorème de convergence dominée à f_n. ∎

Théorème 4.10 (Dérivabilité sous $\int$) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, f une fonction de $E\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.23) et $t_0\in\mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe $\varepsilon>0$, $A\in T$ et $G\in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $m(A=0$ et :*

1. *L'application $t\mapsto f(x,t)$ est dérivable pour tout $t\in]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$ et pour tout $x\in A^c$;*
2. *$|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)|\le G(x)$ pour tout $t\in]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$ et pour tout $x\in A^c$.*

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t)=\displaystyle\int f(.,t)dm=\int f(x,t)dm(x)$, est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0)=\int\frac{\partial f}{\partial t}(x,T_0)dm(x). \tag{4.25}$$

DÉMONSTRATION : Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$, telle que $t_n\to t_0$ lorsque $n\to+\infty$. Soit f_n définie par $f_n(x)=\dfrac{f(x,T_n)-f(x,T_0)}{t_n-t_0}$. Appliquer le théorème des accroissements finis puis de convergence dominée à f_n. ∎

4.9 Espérance et moments des variables aléatoires

Définition 4.14 (Espérance et moment)
Soient (E,T,p) un espace probabilisé, X une variable aléatoire (E,T,p) dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$, si $X\in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega,T,p)$, on définit l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X par :

$$E(X)=\int_E X(x)dp(x).$$

De manière plus générale, on définit, si $X^r\in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega,T,p)$, avec $r\in[1,+\infty[$, le moment d'ordre r de la variable aléatoire X par :

$$E(X^r)=\int_E X^r(x)dp(x).$$

En fait, on calcule rarement l'espérance d'une v.a. comme intégrale par rapport à la probabilité p; en effet Ω et p sont souvent mal connus. Le théorème suivant montre qu'il suffit en fait de connaître la loi de la v.a. X pour calculer son espérance : on se ramène alors au calcul d'une intégrale sur $\mathbb{R}$.
Les deux inégalités suivantes découlent immédiatement du lemme 4.4 :

Lemme 4.9 (Inégalité de Markov) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire positive sur* (E, T)*, d'espérance mathématique* $0 < E(X) < +\infty$*, et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*. Alors :*

$$p(\{X \geq \lambda E(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

DÉMONSTRATION Appliquer le lemme 4.4 avec $|f| = \frac{X}{E(X)}$ et $t = \lambda$. ∎

Lemme 4.10 (Inégalité de Bienaymé Tchebichev) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* (E, T)*, de variance* $\sigma^2(X) < +\infty$*, et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors :*

$$p(\{|X - E(X)| \geq \lambda\sigma(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

DÉMONSTRATION Appliquer le lemme 4.4 avec $|f\ vert = \frac{|X-E(X)|^2}{\sigma^2(X)}$ et $t = \lambda^2$. ∎

Théorème 4.11 (Loi image) *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire sur* (E, T)*, et* p_X *la loi de la variable aléatoire* X *(i.e.* $p_X(A) = p(X^{-1}(A)), \forall A \in T$*. Soit* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ *(fonction mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*). Alors:*

1. $\varphi \circ X \in L^1(E, T, p)$ *ssi* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{R})$
2. *Si* $\varphi \circ X \in L^1(E, T, m)$*, alors* $\int_E \varphi \circ (x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) dp_X(s)$

DÉMONSTRATION Sous les hypothèses et notations du théorème, montrer que:

1. $\varphi \circ X \in L^1(E, T, p)$ ssi $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ $(*)$
2. Si $\varphi \circ X \in L^1(E, T, p)$, alors $\int_E \varphi \circ X(x) dp(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) dp_X(s)$ $(**)$

[*On pourra d'abord montrer que* $(**)$ *est vérifié lorsque* $X = 1_B, B \in T$*, puis lorsque* $\varphi \in \mathcal{E}^+$ *ou* $\mathcal{M}^+$*. On en déduit* $(*)$ *et on démontre ensuite* $(**)$ *en décomposant* $X = X^+ - X^-$*.*]

Remarque 4.7 (Espérances et variances des lois usuelles) *lois discrète*
loi binomiale
loi de Poisson
lois de densité
loi normale etc...

4.10 Exercices

4.10.1 Intégrale des fonctions mesurables positives et espace $\mathcal{L}^1$

Exercice 4.1 (Somme de mesures)

Soient m_1 et m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E, T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur (E,T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T ; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m ; montrer que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

Exercice 4.2 (Mesure de Dirac)

Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.1.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f d\delta_0$.

Exercice 4.3 (Restrictions de la mesure de Lebesgue)

Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On note λ_A [resp. λ_B] la restriction à $\mathcal{B}(A)$ [resp. $\mathcal{B}(B)$] de la mesure de lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B, \mathcal{B}(B), \lambda_B)$. Montrer que $f_{|A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A, \mathcal{B}(A), \lambda_A)$ et que $\int f_{|A} d\lambda_A = \int f 1_A d\lambda_B$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

Exercice 4.4 (Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues)

Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et que $\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement...) par λ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure le Lebesgue (aussi notée λ...) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.5 (f, $g \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$)

Soient f, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Exercice 4.6 (f intégrable implique f finie p.p.)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int f dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

2. Montrer que si $A \in T$ est tel que $m(A) = 0$ alors $\int_A f dm (= \int f 1_A dm) = 0$.

Exercice 4.7 (Caractérisation de l'intégrabilité)

Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$, $A_n = \{x \in E, |u(x)| \geq n\}, n \in \mathbb{N}$ et $B_n = \{x \in E, n < |u(x)| \leq n+1\}, n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que :

$$\int |u| dm < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{4.26}$$

2. Soit $p \in [1, +\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(A_n) < +\infty. \tag{4.27}$$

Exercice 4.8 (Sur la convergence en mesure)

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, alors $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\, g \in \mathcal{M}$. [*s'inspirer de la question 3. de l'exercice 3.10.*]

Exercice 4.9 (Inégalité de Markov)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $am(\{|f| > a\}) \le \int_{\{|f|>a\}} |f|\, dm$.
2. Montrer que $m(\{|f| > a\}) \le (\int |f|\, dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)
3. Montrer que
$$\lim_{a\to\infty} am(\{|f| > a\}) = 0. \tag{4.28}$$
4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (4.28) dans les 2 cas suivants : $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$.

Exercice 4.10 (Sur $f \ge 0$ p.p.)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que les 2 conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f \ge 0$ p.p.,
2. $\int_A f\, dm \ge 0$ pour tout $A \in T$.

Exercice 4.11

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $0 \le f \le 1$ p.p. et que $\int f\, dm = \int f^2\, dm$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable fini A tel que $f = 1_A$ p.p..

Exercice 4.12 (Intégration par rapport à une mesure image)

Soit (E, T, m) un espace mesuré, (F, S) un espace mesurable et f de E dans F. On suppose que f est mesurable, c'est à dire que $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in S$. pour tout $B \in S$, on pose $\mu(B) = m(f^{-1}(B))$ (On note souvent $\mu = f_\star m$).

1. Montrer que μ est une mesure sur S (on l'appelle *mesure image* de m par f).
2. $f_\star m$ est-elle finie (resp. σ-finie, diffuse) lorsque m est finie (resp. σ-finie, diffuse) ?
3. Montrer qu'une fonction Φ mesurable de F dans $\mathbb{R}$ est $f_\star m$ intégrable si et seulement si $\Phi \circ f$ est m-intégrable et que dans ce cas
$$\int_E \Phi \circ f\, dm = \int_F \Phi\, d\mu.$$

4.10.2 L'espace L^1

Exercice 4.13 (Comparaison de convergence dans L^1)

On considère ici l'espace mesurable $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R})$, où $B(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a. On pose $\mu = \delta_1 + \delta_2 + 3\lambda$ (noter que μ est une mesure sur $B(\mathbb{R})$). Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On pose $f_n = f1_{[-n,n]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $L^1(\mu) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mu)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\mu)$, et calculer $a_n = \int f_n d\mu$.
2. A-t-on convergence simple, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans $L^1(\mu)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?.

Exercice 4.14 (Convergence uniforme et convergence des intégrales)

Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$; on suppose que f_n converge uniformément vers f.

1. A-t-on $f \in L^1$? [*distinguer les cas* $m(E) < +\infty$ *et* $m(E) = +\infty$.]
2. Si $f \in L^1$ et $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, a-t-on : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$?

Exercice 4.15

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f \in L^1$; on suppose que $f_n \geq 0$ pp $\forall n \in \mathbb{N}$, que $f_n \to f$ pp et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1. [*on pourra examiner la suite* $(f - f_n)^+$.]

Exercice 4.16 (Exemple de convergence)

1. Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $f_n \to g$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $f = g$ p.p.
2. On suppose maintenant $(E, T, m) = ([-1, 1], \mathcal{R}, \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction : $f_n = n1_{[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$.
   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1, et que la suite $(\int f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (b) Peut-on appliquer le théorème de Lebesgue de la convergence dominée ?
   (c) A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$?
   (d) Montrer que pour toute fonction φ continue de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\int f_n \varphi d\lambda \to \int \varphi d\delta_0$ lorsque $n \to +\infty$ (on dit que $f_n\lambda$ tend vers δ_0 dans l'ensemble des mesures sur les boréliens de $[-1, 1]$ pour la topologie "faible $*$").

Exercice 4.17 (A propos du lemme de Fatou)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ t.q. $f_n \geq 0$ *pp* $\forall\, n \in \mathbb{N}$. On pose, pour presque tout $x \in E$, $f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$.

1. Construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f_n = g_n$ *pp*.

2. On pose $g = \liminf_{n\to+\infty} g_n$ (où g_n est construite à la question 1.

3. Montrer que $f = g$ pp, que $f \geq 0$ *pp* et que :

$$\int f dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm \tag{4.29}$$

4. On suppose de plus que :

   (i) $\exists\, C > 0$ t.q. $\displaystyle\int f_n dm \leq C \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   (ii) $f_n \to f$ *pp*.

   Montrer que $f \in L^1$ et $f < +\infty$ *pp*.

Exercice 4.18 (Théorème de Beppo-Levi)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et f: $E \to \mathbb{R}$, t.q. :

(i) $f_n \to f$ *pp* lorsque $n \to +\infty$.

(ii) $f_{n+1} \geq f_n$ *pp* (ou $f_{n+1} \leq f_n$ *pp*) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ *pp*, $f = g$ *pp*, $g_{n+1} \geq g_n$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$), et $g_n(x) \to g(x)$, pour tout $x \in E$.

2. Montrer que $f \in L^1 \iff \lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int f_n dm \in \mathbb{R}$.

3. On suppose ici que $f \in L^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.19 (Préliminaire pour le théorème de Vitali)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$. [*Considérer* $C_n = \{x \in E\,;\ \frac{1}{n} \leq |f(x)|\}$.]

Exercice 4.20 Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T$, $m(A) \leq \delta \Longrightarrow \displaystyle\int_A |f| dm \leq \varepsilon$. [*Introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$ t.q. :

   (i) $m(C) < +\infty$,

   (ii) $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$,

   (iii) $\sup_C |f| < +\infty$,

[*Considérer* $C_n = \{x \in E\,;\ \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$, *et montrer que pour* $n \geq n_0$ *où* n_0 *est bien choisi,* C_n *vérifie (i), (ii) et (iii).*]

Exercice 4.21 (Théorème de Vitali)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f \colon E \to \mathbb{R}$, telles que $f_n \to f$ *pp*.

1. On suppose $m(E) < +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ ssi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable (i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;;\forall \;\; A \in T, \forall \;\; n \in \mathbb{N}, m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f_n| dm \leq \varepsilon$). [*Pour montrer le sens* $\Longrightarrow$, *utiliser la question 1 de l'exercice 4.20. Pour le sens* $\Longleftarrow$, *remarquer que* $\int |f_n - f| dm = \int_A |f_n - f| dm + \int_{A^c} |f_n - f| dm$, *utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...*]

2. On suppose maintenant $m(E) = +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ ssi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in T,\ m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon$ pour tout n. [*Pour montrer le sens* $\Longrightarrow$, *utiliser l'exercice 4.20. Pour le sens* $\Longleftarrow$, *utiliser l'exercice 4.20, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.*]

3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

Exercice 4.22 Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, et soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^*_+ \,; |g(s)| \leq C|s| + C, \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{4.30}$$

Pour $u \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$, on note $g(u)$ la (classe de) fonction(s) : $x \mapsto g(u(x))$.

1. Soit $u \in L^1$, montrer que $g(u) \in L^1$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ t.q. $u_n \to u$ *pp*, et $\exists F \in L^1$; $|u_n| \leq F$ *pp*. Montrer que $g(u_n) \to g(u)$ dans L^1.

3. Montrer que g est continue de L^1 dans L^1. [*On pourra utiliser la question 2. et le théorème 4.6 ("réciproque partielle de la convergence dominée")*].

4. On considère ici $(E, T, m) = ([0, 1], \mathcal{R}, \lambda)$. On suppose que g ne vérifie pas (4.30). On va construire $u \in L^1$ telle que $g(u) \notin L^1$.

4.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \geq n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \geq n$.

4.b. On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions données à la question 4.a. Montrer que :

$$\exists\, \alpha > 0\,; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n| n^2} = 1. \tag{4.31}$$

4.c. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n| n^2}$ (où α_n et a_n sont définies en 4.a et 4.b. On pose :

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1}, a_n[}. \tag{4.32}$$

Montrer que $u \in L^1$ et $g(u) \notin L^1$.

Exercice 4.23 Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}(E, T, m)$.

1. pour $p \in [1,+\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ (noter que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$) et on dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si $\|f\|_p < +\infty$. On pose $I = \{p \in [1,+\infty[, f \in \mathcal{L}^p\}$.
   (a) Soient p_1 et $p_2 \in [1,+\infty[$, et $p \in [p_1,p_2]$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, alors $f \in \mathcal{L}^p$. En déduire que I est un intervalle. [*On pourra introduire* $A = \{x; |f(x)| \le 1\}$.]
   (b) On montre sur des exemples que les bornes de I peuvent être ou ne pas être dans I. On prend pour cela: $(E,T,m) = ([2,+\infty[, \mathcal{R}, \lambda)$. Calculer I dans les deux cas suivants:
      i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2,+\infty[$.
      ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2,+\infty[$.
   (c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ et $p \in \overline{I}$, ($\overline{I}$ désigne l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$), t.q. $p_n \uparrow p$ (ou $p_n \downarrow p$). Montrer que $\displaystyle\int |f|^{p_n} dm \to \int |f|^p dm$ quand $n \to +\infty$. [*On pourra encore utiliser l'ensemble* A].

II On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ *pp*. On note $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ *pp*$\}$. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.
   (1) Montrer que $f \le \|f\|_\infty$ *pp*. A-t-on $f < \|f\|_\infty$ *pp*?
   On pose $J = \{p \in [1,+\infty]; f \in \mathcal{L}^p\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.
   (a) Remarquer que $J = I$ ou $J = I \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $p \in I$ et $+\infty \in J$, alors $[p,+\infty] \subset J$. En déduire que J est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$.
   (b) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow +\infty$. On suppose que $\|f\|_\infty > 0$ (noter que $f = 0$ $pp \iff \|f\|_\infty = 0$).
      (a) Soit $0 < c < \|f\|_\infty$. Montrer que : $\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge c$. [*On pourra remarquer que* $\int |f|^p dm \ge c^p m(\{x; |f(x)| \ge c\})$.]
      i. On suppose que $\|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que : $\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty$. [*On pourra considérer la suite* $g_n = \left(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}\right)^{p_n}$ *et noter que* $g_n \le g_0$ *pp*.]
      (c) Déduire de (a) et (b) que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Déduire des deux parties précédentes que $p \to \|f\|_p$ est continue de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\overline{J}$ désigne l'adhérence de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c.à.d. $\overline{J} = [a,b]$ si $J = |a,b|$, avec $1 \le a \le b \le +\infty$, et $|$ désigne] ou [).

Exercice 4.24 Soit $f : \mathbb{R} \times R_+ \to \mathbb{R}_+$donnée par: $f(t,x) = \cosh(\frac{t}{1+x}) - 1$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t,.)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{R}, \lambda)$.

2. On pose: $F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x)dx$. Montrer que F est continue, dérivable. Donner une expression de F'.

Exercice 4.25 (Contre exemple à la continuité sous le signe $\int$) Soit $f : R_+ \times]0,1[\to \mathbb{R}_+$ donnée par: $f(t,x) = 1$ si $x \in [0, \frac{t}{4}] \cup [t,1]$, $f(\frac{t}{2}, t) = \frac{2}{t}$ et f est affine par morceaux.

1. Montrer que la fonction $f(.,x)$ est continue pour tout $x \in]0,1[$.

2. Montrer que $f(t,x) \to 1$ lorsque $t \to 0$, pour tout $x \in]0,1[$.

3. Montrer que $\int f(t,x)dx \not\to 1$ lorsque $t \to 0$. Pourquoi ne peut on pas appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$?

4.10.3 Espérance et moments des variables aléatoires

Exercice 4.26 *Soient (E,T) un espace probabilisé et X une variable aléatoire de (E,T) dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$, de loi de probabilité p_X. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans les cas suivants :*

1. *p_X est la loi uniforme sur $[a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$;*
2. *p_X est la loi exponentielle ;*
3. *p_X est la loi de Gauss.*

Exercice 4.27 Dans une ruche, la longévité d'une abeille ouvrière née au printemps est une variable aléatoire X définie par la densité de probabilité $f(t) = \lambda t^2 e^{-\alpha t}$, où λ et α sont des réels positifs.
Sachant que la longévité moyenne d'une abeille est de 45 jours, calculer λ et α.

Exercice 4.28 (Problème de Buffon) Sur un parquet "infini" dont les lattes ont une largeur $2d$, on laisse tomber au hasard une aiguille de longueur 2ℓ avec $\ell < d$, et on veut estimer la probabilité de l'événement A: "l'aiguille rencontre un interstice". On appelle (Ω, T, p) l'espace probabilisé associé à ce problème.
On considère:

- que la position x du centre de l'aiguille par rapport à l'interstice le plus proche et dans la direction $x'x$ perpendiculaire aux lattes est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-d,d]$,
- que l'angle orienté θ que fait l'aiguille avec l'interstice est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que l'événement A "correspond" (on précisera en quel sens) à la partie P_A du plan (x,θ): $P_A = \{(x,\theta) \in [-d,d] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; |x| < \ell \sin\theta\}$. Représenter graphiquement P_A.
2. Montrer que $p(A) = \frac{2\ell}{\pi d}$.

Chapter 5

Mesures sur la tribu des boréliens

5.1 Liens entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale des fonctions continues

On a admis au chapitre 2 l'existence d'une mesure λ, dite mesure de Lebesgue, définie sur $\mathcal{R}$, telle que la mesure d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit égale à sa longueur (cf théoréme de Carathéodory, page 21). En fait, l'existence de la mesure de Lebesgue peut aussi se démontrer (et c'est une conséquence directe) en passant par le théorème de Riesz, qui relie les mesures abstraites et les "mesures de Radon", définies à partir des fonctions continues à support compact. Nous commençons par montrer que l'intégrale de Lebesgue définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ correspond à l'intégrale "classique" des fonctions continues (et plus généralement des fonctions réglées).

Proposition 5.1 *Soient $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fonction continue à support compact), et a, b des réels tels que $a < b$ et supp$(f) \subset]a, b[$. Alors $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ et $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$.*

DÉMONSTRATION: Ecrire f comme limite uniforme de fonctions en escalier f_n; remarquer qu'il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ (avec $]a, b[\subset]\alpha, \beta[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que supp$(f_n) \subset]\alpha, \beta[$ si $n \geq N$. Les fonctions en escalier étant aussi étagées: $\int f_n d\lambda = \int_\alpha^\beta f_n(x)dx$ pour $n \geq N$. Dominer les fonctions f_n "convenablement" à partir d'un certain rang et passer à la limite dans l'égalité en utilisant d'une part le théorème de convergence dominée et d'autre part la définition de l'intégrale des fonctions continues. ■

Le résultat précédent se généralise à l'intégrale de Riemann des fonctions Riemann-intégrables (construite à partir des sommes de Darboux). Ceci fait l'objet de l'exercice 5.2.

5.2 Construction de la mesure de Lebesgue

On définit les espaces de fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) suivants :

$$\begin{aligned} C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &= \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty\}, && (5.1) \\ C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &= \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(x) \to 0, \text{ quand } |x| \to \infty\}, && (5.2) \\ C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &= \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists K \subset \mathbb{R}, \text{ compact}, f = 0, \text{ sur } K^c\}. && (5.3) \end{aligned}$$

Il est clair que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Soit m une mesure finie sur $(\mathbb{R},\mathcal{R})$, alors $C_b \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{R},m)$ et l'application qui à f associe $\displaystyle\int fdm$ est linéaire continue positive sur $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme (appelée aussi norme "∞" ; on rappelle qu'avec cette norme $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach, mais que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ne l'est pas). On rappelle enfin que si L est une application linéaire de $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, on dit que L est positive si $L(f) \geq 0$ pour tout f telle que $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On énonce maintenant des résultats, dûs à Riesz, qui font le lien entre l'intégrale des fonctions continues et les mesures abstraites sur $\mathcal{R}$.

Théorème 5.1 (Riesz) *Soit L une forme linéaire positive sur C_c dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure m sur $(\mathbb{R},\mathcal{R})$ telle que :*

$$\forall \ \ f \in C_c, \quad L(f) = \int fdm. \tag{5.4}$$

De plus, m est σ-finie.
DÉMONSTRATION Soit L une forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que L est continue, c.à.d.: pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ t.q. pour toute fonction continue à support dans K, $|L(f)| \leq C_K\|f\|_\infty$. (Considérer une fonction $\psi_K \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t. q. $\psi_K(x) = 1$ si $x \in K$, et $\psi_K(x) \geq 0$).

2. Montrer le lemme suivant:

   Lemme 5.1 (Dini) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$. Alors f_n converge uniformément vers f.

3. Déduire des deux étapes précédentes que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$, alors $L(f_n) \to L(f)$.

4. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des suites telles que $f_n \uparrow f$ et $g_n \uparrow g$ (ou $f_n \downarrow f$ et $g_n \downarrow g$), où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $f \leq g$ alors $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) \leq \lim_{n\to+\infty} L(g_n)$ (et dans le cas particulier où $f = g$, $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) = \lim_{n\to+\infty} L(g_n)$.

5. On définit:

$$A_+ \ = \ \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} L(f_n) < +\infty\}, \tag{5.5}$$
$$A_- \ = \ \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} L(f_n) > -\infty\}, \tag{5.6}$$

   Si $f \in A^+$, on pose $L(f) = \lim_{n\to+\infty} L(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f$. Si $f \in A^-$, on pose $L(f) = \lim_{n\to+\infty} L(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f$. Vérifier que ces définitions sont cohérentes (c.à.d. qu'elles ne dépendent pas des suites choisies et que si $f \in A^+ \cap A^-$, les deux définitions coincident). Montrer les propriétés suivantes:

   (a) Si $f \in A^+$ (resp. A^-) alors $-f \in A^-$ (resp. A^+)et $L(-f) = -L(f)$.
   (b) Si $f, g \in A^+$ (resp. A^-) alors $f + g \in A^+$ (resp. A^-) et $L(f + g) = L(f) + L(g)$.
   (c) Si $f \in A^+$ (resp. A^-) et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors $\alpha f \in A^+$ (resp. A^-) et $L(\alpha f) = \alpha L(f)$.
   (d) Si $f \in A^+$ (resp. A^-) et $g \in A^+$ alors $\sup(f, g) \in A^+$ et $\inf(f, g) \in A^+$.
   (e) Si $f, g \in A^+$ (resp. A^-) et $f \geq g$, alors $L(f) \geq L(g)$.

(f) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+$ (resp. A^-) et $f_n \uparrow f \in A^+$ (resp. $f_n \downarrow f \in A^-$), alors $L(f_n) \geq L(f)$.

(g) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+$ (resp. A^-) t.q. $f_n \uparrow f$ (resp. $f_n \downarrow f$), où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) < +\infty$, alors $f \in A^+$.

Remarquer aussi que A^+ contient toutes les fonctions caratéristiques des ouverts bornés et que A^- contient toutes les fonctions caratéristiques des compacts.

6. On pose:

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A^+ \text{ et } h \in A^-; h \leq f \leq g \text{ et } L(g) - L(h) \leq \varepsilon\} \tag{5.7}$$

et pour $f \in E$, on définit:

$$L(f) = \sup_{\substack{h\in A^- \\ h\leq f}} L(h) = \inf_{\substack{g\in A^- \\ g\geq f}} L(g). \tag{5.8}$$

Montrer que cette définition a bien un sens, c.à.d. que d'une part: $\sup_{\substack{h\in A^- \\ h\leq f}} L(h) = \inf_{\substack{g\in A^- \\ g\geq f}} L(g)$, et d'autre part la définition de L sur E est compatible avec la définition sur A^+ et A^- (après avoir remarqué que $A^+ \subset E$ et $A^- \subset E$). Montrer les propriétés suivantes sur E:

(a) E est un espace vectoriel et L une forme linéaire positive sur E.

(b) E est stable par passage à la limite croissante ou décroissante.

(c) E est stable par inf et sup, i.e. si $f \in E$ et $g \in E$, alors $\sup(f,g) \in E$ et $\inf(f,g) \in E$.

7. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c$ t.q. $0 \leq \varphi_n \leq 1$ et $\varphi_n \uparrow 1$. On pose $T = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); 1_A\varphi_n \in E \forall n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $T \supset \mathcal{R}$.

8. Pour $A \in T$, on pose: $m(A) = \lim_{n\to+\infty} L(1_A\varphi_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que m est une mesure σ-finie.

9. Montrer que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, T, m) = E$ et que $\int f dm = L(f), \forall f \in E$.

10. Montrer que si il existe des mesures m et μ telles que $\int f dm = \int f d\mu$, $\forall f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $m = \mu$.

■

Théorème 5.2 (Riesz) *Soit L une application linéaire positive de C_0 dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure m finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ telle que :*

$$\forall \;\; f \in C_0, \;\; L(f) = \int f dm. \tag{5.9}$$

DÉMONSTRATION Soit L une application linéaire positive de C_0 dans $\mathbb{R}$.

1. Pour montrer que si m existe, alors m est finie, considérer les fonctions $f_n = 1_{[-n,n]} + (x+n+1)1_{[-(n+1),n]} + (n+1-x)1_{[n,n+1]}$, et la continuité de L.

2. Montrer que L est continue.[*Raisonner par l'absurde en supposant que L est positive et non continue : en utilisant le fait que si L est non continue alors L est non bornée sur la boule unité, construire une suite g_n de fonctions positives telles que la série de terme général g_n converge absolument. Soit g la limite de la série de terme général g_n, montrer que $T(g) > n, \forall n \in \mathbb{N}$.*]

3. Montrer que la restriction T de L à $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est linéaire continue, et donc par le théorème 5.1 qu'il existe une unique mesure m telle que $T(f) = \int f dm, \forall f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4. Montrer que $L(f) = \int f dm \; \forall f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [*approcher f de manière uniforme par $f_n \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, prendre par exemple: $f_n = f\varphi_n$ où $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi_n = 1$ sur $[-n,n]$ et $\varphi_n(x) = 0$ sur $[-(n+1),n]^c$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) = L(f)$ et que $\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$.*

■

Le résultat du théorème (5.2)est faux si on remplace C_0 par C_b. On peut, par exemple, construire une application linéaire continue positive sur C_b non identiquement nulle, et nulle sur C_0 (en utilisant une technique très similaire à la démonstration du théorème de prolongement des applications linéaires continues de Hahn-Banach, voir cours et TD d'Analyse Fonctionnelle en maîtrise).
On peut maintenant faire la remarque suivante:

Remarque 5.1 Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. On note $C(K,\mathbb{R}) = \{f_{|_K}, f \in C_b\}$. Si m est une mesure finie sur $(K,\mathcal{R})$ l'espace fonctionnel $C(K,\mathbb{R})$ est inclus dans $L^1_{\mathbb{R}}(K,\mathcal{R},m)$, et l'application qui à $f \in C(K,\mathbb{R})$ associe $\int f dm$ est linéaire positive (et continue, si $C(K,\mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, soit L une application linéaire positive de $C(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème précédent permet de montrer qu'il existe une unique mesure finie, notée m, sur $(K,\mathcal{R})$ telle que :

$$L(f) = \int f dm, \quad \forall f \in C(K,\mathbb{R}). \tag{5.10}$$

Considérons maintenant le cas des mesures signées: si m est une mesure signée sur $(\mathbb{R},\mathcal{R})$ (ou sur $(K,\mathcal{R})$), l'application qui à $f \in C_0$ (ou $\in C(K)$, K étant une partie compacte de $\mathbb{R}$) associe $\int f dm$ est linéaire continue (pour la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, on a aussi existence et unicité d'une mesure (signée) définie à partir d'une application linéaire continue de C_0 (ou de $C(K)$) dans $\mathbb{R}$:

Théorème 5.3 (Riesz, mesures signées) *Soit L une application linéaire continue (pour la norme infinie) de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $C(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$). Alors il existe une unique mesure signée, notée m, sur $(R,\mathcal{R})$ (ou sur $(K,\mathcal{R})$) telle que :*

$$L(f) = \int f dm, \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})(\text{ ou } C(K,\mathbb{R})). \tag{5.11}$$

Les éléments de $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}))'$ (ou $(C(K,\mathbb{R}))'$) sont appelés "mesures de Radon" sur $\mathbb{R}$ (ou K).
DÉMONSTRATION On se ramène au théorème de Riesz "positif"...

Définition 5.1 (Mesure de Radon) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$, alors on appelle mesure de Radon sur Ω un élément de $M(\Omega) = (C(\overline{\Omega},\mathbb{R}))'$, c.à.d. une application linéaire continue (pour la norme infinie) de $C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 5.2 *Soit T une forme linéaire sur $C_c(\Omega,\mathbb{R})$;*

1. *Si T est continue pour la norme $\|.\|_\infty$, alors il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que $T(f) = \int f d\mu$, $\forall f \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$.*

2. *Si T est continue pour la topologie "naturelle" de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$, (c.à.d. pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que $T(f) \leq C_K\|f\|_\infty$, $\forall f \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$ avec $\text{supp}(f) \subset K$) alors ce résultat est faux ; par contre il existe deux mesures (positives) μ_1 et μ_2 sur sur les boréliens de Ω telles que*

$T(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2$, $\forall f \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$; noter que μ_1 et μ_2 peeuvent prendre toutes les deux la valeur $+\infty$ (exemple : $N = 1$, $\Omega =]-1, 1[$, $T(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} nf(1 - \frac{1}{n}) - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} nf(-1 + \frac{1}{n})$), et donc que $\mu_1 - \mu_2(\Omega)$ n'a pas toujours un sens....

Soit maintenant T une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, continue pour la norme $\|.\|_\infty$, alors il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que $T(f) = \int f d\mu$, $\forall f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

5.3 Densité et continuité en moyenne

Le résultat de densité que nous énonçons à présent permet d'approcher une fonction de $L^1_R(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ "aussi près que l'on veut" par une fonction continue à support compact. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer certaines propriétés des fonctions de L^1: On montre la propriété pour les fonctions continues, ce qui s'avère en général plus facile, et on "passe à la limite".

Théorème 5.4 (Densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$)
L'ensemble $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda_N)$, i.e.: $\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda_N)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$.

DÉMONSTRATION

1. Montrer que $C_c \subset L^1$.
2. Soient K un compact de $\mathbb{R}$ et O un ouvert de $\mathbb{R}$ tels que $K \subset O$. On pose : $d = d(K, O^c) = \inf\{d(x, y), x \in K, y \in O^c\}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{d}\Big(d - d(x, K)\Big)^+$, avec $d(x, K) = \inf\{d(x, y), y \in K\}$.
   (a) Montrer que $d > 0$.
   (b) Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, [0, 1])$, que $0 \le \varphi \le 1$ (partout), que $\varphi = 1$ sur K et $\varphi = 0$ sur O^c.
3. En utilisant la question précédente et la régularité de la mesure λ, montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathcal{R}$ t.q. $\lambda(A) < +\infty$, $\exists \varphi \in C_c$ t.q. $\|1_A - \varphi\|_1 \le \varepsilon$.
4. Montrer que C_c est dense dans L^1, c.à.d. : $\forall \varepsilon > 0, \forall f \in L^1$, $\exists \varphi \in C_c$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \le \varepsilon$. [*Prendre d'abord $f = 1_A$, puis $f \in \mathcal{E}_+ \cap L^1$, puis $f \in \mathcal{M}_+ \cap L^1$, et enfin $f \in L^1$.*]

■

Ce résultat sera utilisé pour montrer la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$ (voir chapitre 6). Il permet déjà de démontrer le résultat suivant:

Théorème 5.5 (Continuité en moyenne) *Soient $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On définit f_h ("translatée" de f) par : $f_h(x) = f(x + h)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\|f_h - f\|_1 = \int |f(x + h) - f(x)| dx \to 0 \text{ lorsque } h \to 0. \tag{5.12}$$

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 5.11

5.4 Intégrales impropres des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On considère ici des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$.

Définition 5.2 (Intégrabilité à gauche) *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall \;\; \beta \in]\alpha, a[$, $f1_{]\alpha,\beta[} \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda))$. On dit que f est intégrable à gauche en a (ou encore que $\displaystyle\int^a$ existe) si $\displaystyle\int f1_{]\alpha,\beta[} d\lambda$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $\beta \to a$. Cette limite est notée $\displaystyle\int_\alpha^a f(t)dt$.*

Remarque 5.3 Ceci ne veut pas dire que $f1_{]\alpha,a[} \in L^1$. Il suffit pour s'en convaincre de prendre $a = +\infty$, $\alpha = 0$, considérer la fonction f définie par $f(0) = 1$ et, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Par contre, dès que la fonction f considérée est de signe constant, on a équivalence entre les deux notions :

Proposition 5.2 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall \;\; \beta \in]\alpha, a[$, $f1_{]\alpha,\beta[} \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda))$. Alors f est intégrable à gauche en a si et seulement si $f1_{]\alpha,a[} \in L^1$.*
DÉMONSTRATION : Ce rsultat se déduit du théorème de convergence monotone (construire une suite qui tend en croissant vers $f1_{]\alpha,a[}$). ■

5.5 Exercices

Exercice 5.1
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (n - n^2 x)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathcal{R}$ des boréliens de $]0,1[$, et $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{R}, \lambda)$.
Soit T l'application de $C([0,1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(\varphi) = \varphi(0)$.

1. Montrer que $T \in \Big(C([0,1], \mathbb{R})\Big)'$ (on rappelle que $\Big(C([0,1], \mathbb{R})\Big)'$ est le dual de $C([0,1], \mathbb{R})$, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme).
2. Montrer que $T(\varphi) = \int \varphi d\delta_0$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.
3. Soient $g \in L^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Big(C([0,1], \mathbb{R})\Big)$ définie par: $\varphi_n = \frac{f_n}{2n}$. Montrer que $\int g\varphi_n d\lambda \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   En déduire qu'il n'existe pas $g \in L^1(]0,1[, \mathbb{R})$ t.q. on ait, pour toute fonction $\varphi \in C([0,1], \mathbb{R})$: $T(\varphi) = \int g\varphi d\lambda$; montrer que δ_0 n'est pas une mesure de densité.

Exercice 5.2 (Intégrale de Riemann) Soient a, b des réels, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(t)| \leq M, \forall t \in [a,b]$. Soit Δ une subdivision de $[a,b]$, $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}\}$ avec $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{N+1} = b$. On pose $S^\Delta = \sum_{i=0}^N (\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i)$, et $S_\Delta = \sum_{i=0}^N (\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i)$. On note A l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ et $S^\star = \inf_{\Delta\in A} S^\Delta$, et $S_\star = \sup_{\Delta\in A} S^\Delta$. On dit que f est Riemann intégrable si $S^\star = S_\star$. On pose alors $R\int_a^b f(x)dx = S^\star$.

1. Soient Δ_1 et $\Delta_2 \in A$ tels que $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Montrer que $S_{\Delta_1} \le S_{\Delta_2} \le S^{\Delta_2} \le S^{\Delta_1}$. En déduire que $S_\Delta \le S^{\Delta'}$ pour tous $\Delta, \Delta' \in A$, et donc que $S_\star \le S^\star$.

2. Montrer qu'il existe une suite de subdivisions $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_{\Delta_n} \to S_\star$ et $S^{\Delta_n} \to S^\star$ quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que si f est continue, f est Riemann-intégrable.

4. On suppose maintenant que f est Riemann-intégrable. Soit $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $S_{\Delta_n} \to S_\star$ et $S^{\Delta_n} \to S^\star$ quand $n \to +\infty$. Pour $\in \mathbb{N}$, on note $\Delta_n = \{x_O^{(n)}, \ldots, x_{N_n+1}^{(n)}\}$, et on pose:

$$g_n(x) = \inf\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}], x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, N_n + 1 \tag{5.13}$$
$$h_n(x) = \sup\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}], x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, N_n + 1 \tag{5.14}$$
$$g_n(b) = h_n(b) = 0. \tag{5.15}$$

   (a) Montrer que g_n et $h_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}^1$, où $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\{[a,b], \mathcal{R}, \lambda\})$ et $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\{[a,b], \mathcal{R}, \lambda\})$, et que $\int (h_n - g_n) d\lambda \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   (b) Montrer que $g_n \le g_{n+1} \le f \le g_{n+1} \le h_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (c) On pose $g = \lim_{n\to+\infty} g_n$ et $h = \lim_{n\to+\infty} h_n$; montrer que $g = h$ p.p. . En déduire que $f \in L^1$ et que $\int f d\lambda = R \int_a^b f(x)dx$.

   (d) Soit f définie par:

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \tag{5.16}$$
$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \tag{5.17}$$

   Montrer que f n'est pas Riemann intégrable, mais que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{R}, \lambda)$.

Exercice 5.3 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ convergeant simplement vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$; on suppose que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subset C(]0,1[,\mathbb{R})$ $)$ converge simplement vers la fonction constante et égale à 1.

1. A-t-on $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$?

2. On suppose maintenant que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction constante et égale à 1 dans $L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{R}, \lambda)$. A-t-on $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$?

Exercice 5.4 On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $f \in L^1$ telles que $f_n \to f$ dans L^1. On suppose qu'il existe $C \ge 0$ tel que $|f_n| \le C$ pp. Montrer que $\int |f_n - f|^2 d\lambda \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.5 Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda) = \mathcal{L}^1$. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $F(x) = \int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$ pour $x \ge 0$, et $F(x) = -\int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$ pour $x < 0$ Montrer que F est uniformément continue.

Exercice 5.6 Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que f admet une limite à l'infini ; montrer que cette limite est nulle.

2. On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

3. On suppose que f est uniformément continue ; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$? [*On pourra commencer par montrer que, pour* $\eta>0$ *quelconque et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta}|f(x)|d\lambda(x)=0.] \tag{5.18}$$

4. On suppose que $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f'\in L^1$; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$?

Exercice 5.7 On munit $\mathbb{R}^N$ de la tribu borélienne $\mathcal{R}_N$ et de la mesure de Lebesgue λ_N. Soient f et $g\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ telles que $f=g$ pp. Montrer que $f=g$ partout. [*On dira donc que* $f\in L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{R}_N,\lambda_n)$ *est continue si il existe* $g\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ *t.q.* $f=g$ *pp. Dans ce cas on identifie* f *avec* g.]

Exercice 5.8 1. On considère l'espace mesuré $(E,T,m)=(]0,1[,\mathcal{R},\lambda)$; soit $0<\alpha<+\infty$; on pose, pour $x\in]0,1[$, $f(x)=(\frac{1}{x})^\alpha$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f\in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$?

2. On considère l'espace mesuré $(E,T,m)=(\mathbb{R}_+^*,\mathcal{R},\lambda)$; soit f définie, pour $x\in]0,+\infty[$, par : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Montrer que $f\notin L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On pose $f_n=f1_{]0,n[}$. Montrer que $f_n\in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, que $f_n\to f$ p.p. (et même uniformément) et que $\int f_n dm$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 5.9 Soit μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{R}$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si, pour toute fonction continue à support compact on a :

$$\int f d\mu=\int f d\nu, \tag{E}$$

alors $\mu=\nu$. [*On rappelle (cf. exercice 2.23) que si* m *est une mesure finie sur* $\mathcal{R}$, *alors :* $\forall A\in\mathbb{R}, m(A)=\inf\{m(O), O\supset A, O$ *ouvert de* $\mathbb{R}\}$.]

2. On suppose maintenant que l'égalité (E) est vérifiée pour toute fonction f de $C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Le résultat précédent vous parait-il encore vrai ?

Exercice 5.10 (*Notation: Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on note* f^2 *la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par:* $f^2(x)=(f(x))^2$.) Soit $E=\{f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}); f\in L^1=L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$ et $f'^2\in L^1\}$. Pour $f\in E$, on définit $\|f\|=\int|f|d\lambda+(\int|f'|^2d\lambda)^{\frac{1}{2}}$

1. Montrer que $(E,\|.\|)$ est un espace vectoriel normé. E est-il un espace de Banach ?
2. Soient $a\in\mathbb{R}$ et $\delta\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $a\le\delta a^2+\frac{1}{\delta}$.En déduire que pour $f\in E$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\delta\in\mathbb{R}_+^*$, on a: $|f(x)-f(y)|\le\delta\int|f'|^2d\lambda+\frac{1}{\delta}|x-y|$.
3. Montrer que si $f\in E$, alors:
   - f est uniformément continue.
   - f est bornée.
   - $f^2\in L^1$.

Exercice 5.11 Soient $f \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On définit f_h ("translatée" de f) par : $f_h(x) = f(x+h)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. (noter que $f(.+h) \in L^1$. Alors :

1. Soit $f \in C_c$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.
2. Soit $f \in L^1$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Exercice 5.12 On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$, et $C_b = C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $f \in L^1$, $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on définit
$$f_h(x) = \frac{1}{\lambda_N(B(0,h))} \int_{B(x,h)} f(y)dy,$$
où $B(0,h)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon h. Montrer que f_h est définie partout, que $f_h \in L^1$, et que $f_h \to f$ dans L^1 lorsque $h \to 0$. En déduire qu'il existe $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $h_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et $f_{h_n} \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.
2. On considère maintenant une suite de mesures $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finies sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N)$, t.q. $\mu_n \to \delta_0$ dans C_b' i.e. $\int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu$, $\forall \varphi \in C_b$. Soit f une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure de Lebesgue, et $\nu = f\lambda$. Montrer que $\mu_n * \nu$ est une mesure de densité $f_n \in L^1$ et montrer que $f_n \to f$ dans L^1.
3. Soit $A \in \mathbb{R}$ t.q. $A \subset [0,1]$; on dit que A est "bien équilibré" si pour tout intervalle I de $[0,1]$, on a : $\lambda(I \cap A) = \lambda(I \cap A^c) = \frac{\lambda(I)}{2}$. Montrer qu'il n'existe pas de borélien A de $[0,1]$ bien équilibré.

Chapter 6

Les espaces L^p

6.1 Définitions et premières propriétés

6.1.1 Les espaces L^p, avec $1 \leq p < +\infty$

De la même manière qu'on a défini l'espace des fonctions intégrables, on définit les espaces de fontions de puissance p-ième intégrable :

Définition 6.1 (Les espaces $\mathcal{L}^p$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$, et f une fonction définie de E dans $\mathbb{R}$, mesurable. On pose :*

$$\|f\|_p = \Big(\int |f|^p dm \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.1}$$

On dit que $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $\|f\|_p < +\infty$.

De manière analogue au cas $p = 1$ on quotiente les espaces $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence $=$ p.p. afin que l'application $u \mapsto \|u\|$ définisse une norme sur l'espace vectoriel des classes d"equivalence (voir section 4.5).

Définition 6.2 (Les espaces L^p) *Soient (E, T, m) un espace mesuré. Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^p$ pour la relation d'équivalence ($=$ pp). En l'absence d'ambiguité on notera L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.*

Lemme 6.1 (Inégalité de Young) *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, $p, q \in \,]1, +\infty[$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{6.2}$$

DÉMONSTRATION: Utiliser la convexité de l'exponentielle... ■

Lemme 6.2 (Inégalité de Hölder) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et f, g, $\in \mathcal{M}(E, T)$. Soient $p, q \in \,]1, +\infty[$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :*

$$\int |fg| dm \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.3}$$

DÉMONSTRATION:

1. Montrer que l'inégalité (6.3) est vérifiée si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$.
2. On suppose maintenant $\|f\|_p \neq 0$ et $\|g\|_q \neq 0$. Montrer que si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$, l'inégalité (6.3) est vérifiée.
3. On suppose maintenant $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. Montrer que l'inégalité (6.3) est vérifiée.
4. En déduire que l'inégalité (6.3) est vérifiée dans tous les cas.

■

Lemme 6.3 (Inégalité de Minkowski) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f,\ g,\ \in \mathcal{M}(E, T)$, alors :*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{6.4}$$

DÉMONSTRATION :

1. Montrer que l'inégalité (6.4) est vérifiée si $\|f + g\|_p = 0$ ou si $\|f\|_p = +\infty$ ou si $\|g\|_p = +\infty$,
2. On suppose maintenant $0 < \|f + g\|_p < +\infty$. Ecrire $|f + g|^p \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}$ et appliquer l'inégalité (6.3) pour montrer que (6.4) est vérifiée.

■

On en déduit la propriété suivante:

Proposition 6.1 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $1 \leq p < \infty$. L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur L^p, qui est donc une espace vectoriel normé.*

Théorème 6.1 (Convergence dominée) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$ une suite telle que :*

- *$f_n \to f$ pp,*
- *$\exists \ \ F \in L^p$ telle que $|f_n| \leq F$ pp, $\forall \ \ n \in \mathbb{N}$;*

alors $f_n \to f$ dans L^p (c.à.d $\displaystyle\int |f_n - f|^p dm \to 0$ quand $n \to \infty$).

DÉMONSTRATION :

1. Montrer que $|f| \leq F$ pp et donc $f \in L^p$.
2. Utiliser le théorème de convergence dominée sur $g_n = |f_n - f|^p$ dans L^1 pour montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

■

Théorème 6.2 (Réciproque partielle) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$, etf $\in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :*

- *$f_{n_k} \to f$ pp lorsque $k \to +\infty$,*
- *$\exists \;\; F \in L^p$ telle que $|f_{n_k}| \leq F$ pp, $\forall \;\; k \in \mathbb{N}$.*

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 6.2 (Séries absolument convergentes dans L^p)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$; $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$; alors :

1. *$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ pour presque tout $x \in E$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ (la fonction f est donc définie pp).*
2. *$\exists \;\; F \in L^p$ telle que : $|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq F$ pp, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
3. *$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ dans L^p, lorsque $n \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION :

1. On pose, pour presque tout $x \in E$, $g_n(x) == \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|$. Montrer que $g_n < +\infty$ p.p. .
2. Soit $F(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ (définie pp x); montrer que $F \in L^p$.
3. En déduire que la série de terme général f_n est absolument convergente dans L^p, que:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty \text{ pour presque tout } x \in E, \tag{6.5}$$
et qu'on peut donc définir, pp $x \in E$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
4. On pose : $h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. Montrer que $|h_n| \leq F$.
5. Montrer que $|h_n - f|$ est dominée dans L^p et en déduire que $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ dans L^p, lorsque $n \to +\infty$.

■

Toute série absolument convergente de L^p est donc convergente dans L^p. On en déduit le résultat suivant:

Théorème 6.3 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $1 \leq p < \infty$. L'espace vectoriel normé $(L^p, \|.\|_p)$ est complet.*
On peut maintenant se demander si les espaces L^p sont des espaces de Hilbert. Ceci est vrai pour $p = 2$, et, en général, faux pour $p \neq 2$ (voir à ce propos l'exercice 6.5)

Théorème 6.4 (L'espace L^2) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. L'espace $(L^2, \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert, et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*

$$(f, g) = \int fg \;\; dm. \tag{6.6}$$

DÉMONSTRATION

1. Montrer que $(f, f) = \|f\|_2$.

2. Montrer que l'application : $(f, g) \mapsto \int fg \quad dm$ est un produit scalaire, i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive sur L^2.

■

Remarquons que dans le cas $p = 2$, l'inégalité de Hölder est en fait l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
En général, les espaces L^p, avec $1 < p < +\infty$, autres que L^2 ne sont pas des espaces de Hilbert, mais nous verrons ultérieurement (section 6.2 que ce sont des espaces de Banach réflexifs (c.à.d. que l'injection canonique entre l'espace et son bi-dual est une bijection). Les espaces L^1 et L^∞ (que nous verrons au paragraphe suivant) sont des espaces de Banach non réflexifs (sauf cas particuliers).

6.1.2 L'espace L^∞

Définition 6.3 (L'espace $\mathcal{L}^\infty$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et f une fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) ;*

1. *on dit que f est essentiellement bornée, ou encore que $f \in \mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $\exists C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \le C$ pp ;*

2. *si $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ \quad ; \quad |f| \le C \quad pp\}$,*

3. *si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.*

Remarque 6.1 (Rappels sur la définition de l'inf...) Soit $A \subset \mathbb{R}$; on rappelle que A est borné inférieurement si il existe un minorant de A, i.e. $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \ge \alpha, \forall x \in A$. Si A est borné inférieurement, on définit l'inf de A comme le plus grand des minorants: $\overline{x} = \inf\{x \in A\} = \max\{\alpha; \alpha \le x \forall x \in A\}$. Si A n'est pas borné inférieurement, on pose $\inf A = -\infty$. Dans les manipulations sur les inf (et sur les sup...) il est utile de connaître la caractérisation suivante:

$$\overline{x} = \inf A \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A; x_n \downarrow \overline{x} \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.7}$$

Ceci se démontre très facilement en écrivant:

1. Si A est non borné inférieurement, alors: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in A; y_n \le -n$, et en choisissant $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a donc $x_n \downarrow -\infty = \inf A$.

2. Si A est borné inférieurement, soit $\overline{x} = \inf A$, alors: $\overline{x} + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de A et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in A$ tel que $\overline{x} \le y_n \le \overline{x} + \frac{1}{n}$. En choisissant $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on clairement: $x_n \to \overline{x}$ lorsque $n \to +\infty$.

Le petit lemme suivant (dont la démonstration est immédiate en écrivant la définition de $\|f\|_\infty$) est parfois bien utile.

Lemme 6.4 Si $f \in \mathcal{L}^\infty$, alors $|f| \le \|f\|_\infty$ *pp*.
On a égalité entre le sup essentiel et le sup pour les fonctions continues:

Proposition 6.3 *Si $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ et $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors* $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty$.

DÉMONSTRATION On note : $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

1. Montrer que $\|f\|_\infty \le M$.

2. Soit $C \in \mathbb{R}_+$; montrer que si $|f| \leq C$ p.p. , l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; |f(x)| > C\}$ est un ouvert de mesure nulle. En déduire que si $M < +\infty$, alors $\|f\|_\infty = M$.
3. On se place maintenant dans le cas où $M = +\infty$. Montrer qu'alors $\|f\|_\infty = +\infty$.

■

Définition 6.4 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$; alors :*

1. *$\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel et l'application définie de $\mathcal{L}^\infty$ dans $\mathbb{R}$ par $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty$;*
2. *on définit L^∞ comme l'ensemble des classes d'équivalence sur $\mathcal{L}^\infty$ pour la relation d'équivalence $(= pp)$.*

Proposition 6.4 *L'espace L^∞ est un espace de Banach*
Cette proposition est le conséquence du résultat suivant:

Proposition 6.5 (Séries absolument convergentes dans L^∞) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(E, T, m)$ t. q. $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$. Alors:*

1. *il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| < C$ p.p.*
2. *La série de terme général $f_n(x)$ est, pour presque tout x, absolument convergente dans $\mathbb{R}$. On définit, pour presque tout x: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.*
3. *On a: $f \in L^\infty$ et $\| \sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

Démonstration Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$. On pose, pour presque tout $x \in E$: $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|$.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) < C$ p.p. .
2. En déduire que la série de terme général $f_n(x)$ est, pour presque tout x, absolument convergente dans $\mathbb{R}$, que:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty \text{ pour presque tout } x \in E, \tag{6.8}$$
et qu'on peut donc définir, pp $x \in E$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
3. On pose : $h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. Montrer qu'il existe $C_n \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant pas de x, t.q. $|h_n - f| \leq C_n$, avec $C_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire que $h_n \to f$ dans L^∞ et donc que la série de terme général f_n est convergente dans L^∞.

■

Remarque 6.2 (Sur la convergence dominée...) Attention: le résultat de convergence dominée qu'on a démontré pour les suites de fonctions de L^p, $1 \leq p < +\infty$ est faux pour les suites de fonctions de L^∞. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l' exemple suivant (figure 6.1.2):
$$f_n \in L^\infty([0,1], \mathbb{R}),\ f_n(x) = 1_{[0, \frac{1}{n}]}.$$
On a $f_n \to 0$ p.p. lorsque $n \to +\infty$, $|f_n| \leq 1 \in L^\infty([0,1], \mathbb{R})$ et $\|f_n\| = 1 \not\to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Par contre, le résultat de réciproque partielle de la convergence dominée est vrai, comme conséquence du rśultat que toute suite de fonctions convergeant absolument pour la norme $\mathcal{L}^\infty$ converge dans L^∞ (proposition 6.5). La démonstration est similaire à la démonstration du théorème 4.6.

6.1.3 Quelques propriétés communes aux $L^p, 1 \le p \le +\infty$

Proposition 6.6 (Inclusion des L^p) *Soit (E, T, m) un espace mesuré de mesure finie, i.e. $m(E) < +\infty$; soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \le p < q < +\infty$; alors $L^q \subset L^p$, et l'injection de L^q dans L^p est continue.*

DÉMONSTRATION

1. Montrer si $f \in \mathcal{M}$, et $1 \le p < q < +\infty$, alors $|f|^p < |f|^q + 1$. En déduire que $L^q \subset L^p$.
2. Montrer que si $\|f\|_q \le 1$, alors $\|f\|_p \le m(E) + 1$. En déduire que l'injection de L^q dans L^p est continue.

■

Proposition 6.7 (Inégalité de Hölder généralisée) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, et $f, g \in \mathcal{M}(E, T)$; alors :*

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.9}$$

Remarque 6.3 Les espaces $L^p, p \in]0, 1[$ (que l'on peut définir comme dans le cas $1 \le p < \infty$) sont des espaces vectoriels, mais l'application $f \mapsto \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme sur L^p si $p \in]0, 1[$ (sauf cas particulier).

Remarque 6.4 Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}(E, T)$. L'ensemble $J = \{p \in [1, +\infty], f \in \mathcal{L}^p\}$ est un intervalle de $[1, +\infty]$. L'application définie de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $p \mapsto \|f\|_p$ est continue, voir à ce propos l'exercice 4.23, et dans le cas particulier des fonctions continues à support compact, l'exercice 6.10. En particulier, lorsque $p \to +\infty$, $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$. On en déduit le résultat suivant : si il existe $p_0 < +\infty$ tel que $f \in L^p$ pour tout p tel que $p_0 \le p < +\infty$, et si il existe C telle que $\|f\|_p \le C$, pour tout $p \in [p_0, +\infty[$, alors $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \le C$.

6.2 Théorème de dualité

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $p \in [1, +\infty]$, on rappelle que le conjugué de p est $q = \frac{p}{p-1} \in [1, +\infty]$. Dans toute cette section, on note $L^p = L^{(}_{\mathbb{R}} E, T, m)$.

Proposition 6.8 *Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $g \in L^q$; on définit l'application T_g linéaire continue de L^p dans $\mathbb{R}$ (grâce à l'inégalité de Hölder) : par $T_g(f) = \int fgdm$. L'application linéaire de L^q dans $(L^p)'$, définie par $g \mapsto T_g$ est une isométrie, c.à. d. : $\|T_g\|_{(Lp)'} = \|g\|_q$.*

DEMONSTRATION Le résultat s'obtient par l'inégalité de Hölder et en appliquant T_g à $f = sgn(g)|g|^{(q-1)}$. Si (E, T, m) est σ-fini et $p \in [1, +\infty[$, l'application $g \mapsto T_g$ est en fait surjective, de sorte qu'on peut identifier $(L^p)'$ à L^q, ceci est l'objet du théorème suivant.

Théorème 6.5 (Dualité $L^p - L^q$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, $1 \le p < +\infty$, et $T \in (L^p)'$; alors il existe une unique fonction $g \in L^q$ telle que $T(f) = \int fgdm, \quad \forall \ f \in L^p$.*

Remarque 6.5 (L^∞) *Noter que le résultat précédent est faux pour $p = \infty$. Le dual de L^∞ n'est pas identifiable à L^1 (mais contient L^1).*

DEMONSTRATION DU THÉORÈME 6.5: Soient (E, T, m) un espace mesuré σ-fini : il existe une famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles A_n qu'on peut prendre disjoints deux à deux tels que $m(A_n) < +\infty$ et $E = \bigcup_{n \in N} A_n$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et T une forme linéaire continue sur $L^p(E, T, m) = L^p$.

I. On considère d'abord le cas $p = 2$, montrer qu'il existe une unique fonction $g \in L^2$ telle que $T(f) = \int fgdm, \quad \forall \ f \in L^2$.

II. On s'intéresse maintenant au cas $p \in [1, 2]$

1. Soit ψ, une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $\psi \in L^r$, où $r = \dfrac{2p}{2-p}$, alors, pour toute fonction f de L^2, la fonction $f\psi$ est dans L^p.
   Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in L^r$ de la forme : $\psi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n 1_{A_n}, \ \ \alpha_n > 0$.
   Dans toute la suite, ψ désignera une fonction particulière de la forme précédente.
2. Déduire des questions précédentes l'existence d'une unique fonction $G \in L^2$ telle que, pour toute fonction f de L^p telle que $\dfrac{f}{\psi} \in L^2$, on a $T(f) = \int f \dfrac{G}{\psi} dm$.
3. Soient $p \in]1, 2[$, et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; on définit les fonctions f_n, de E dans $\mathbb{R}$, par :
$$f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \le n\}} 1_{B_n} \text{ où } g = \frac{G}{\psi} \text{ et } B_n = \bigcup_{p=1}^{n} A_p. \tag{6.10}$$
   (a) Montrer que : $\forall \ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$.
   (b) En déduire que $g = \dfrac{G}{\psi} \in L^q$. [*Il est fortement conseillé d'utiliser la continuité de T de L^p dans* $\mathbb{R}$.]
4. Soient $p = 1$ et $f \in L^1$. On définit : $f_n = \text{sgn}(g) 1_A 1_{B_n}$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.
   (a) Montrer que : $\forall \ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$.
   (b) En déduire que $m(A \cap B_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et que $g \ (= \dfrac{G}{\psi}) \in L^\infty$.

5. Soient $p \in [1,2[$ et $f \in L^p$, on définit $f_n = f 1_{\{|f| \le n\}} 1_{B_n}$. Montrer que $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$ et que f_n tend vers f dans L^p. En déduire que il existe $g \in L^q$ telle que $T(f) = \displaystyle\int fgdm, \quad \forall \ f \in L^p$.

III. On s'intéresse maintenant au cas $p > 2$, et on suppose ici que $T \ge 0$, i.e. $T(f) \ge 0$ pour toute fonction $f \ge 0$ p.p. Soit q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. On suppose dans cette question que la forme linéaire T est, de plus, continue pour la norme $\|.\|_{L^1}$.
   (a) Montrer qu'il existe $g \in L^\infty$ telle que $T(f) = \displaystyle\int fgdm$ pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^p$.
   (b) Montrer que $g \in L^q$. [*On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question II.3*].
   (c) En déduire qu'il existe $g \in L^q$ telle que $T(f) = \displaystyle\int fgdm$ pour toute fonction $f \in L^p$ et que $\|g\|_{L^q} = \|T\|_{(L^p)'}$. [*On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question II.5*].

2. On suppose ici qu'il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de formes linéaires sur L^p vérifiant les quatre propriétés suivantes :

$$\forall \ f \in L^p; f \ge 0, \quad 0 \le T_n(f) \le T(f) \tag{6.11}$$
$$\forall \ f \in L^p; f \ge 0, \quad T_n(f) \le T_{n+1}(f) \tag{6.12}$$
$$\forall \ f \in L^p; f \ge 0, \quad T_n(f) \le n \int fdm \tag{6.13}$$
$$\forall \ f \in L^p; f \ge 0, \quad T_n(f) \text{ converge vers } T(f) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty. \tag{6.14}$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in L^q$ tel que $T_n(f) = \displaystyle\int g_n fdm$, pour tout $f \in L^p$. Montrer que $\|g_n\|_{L^q} \le \|T\|_{(L^p)'}$
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le g_n \le n$ p.p. et $g_n \le g_{n+1}$ p.p..
   (c) Montrer qu'il existe $g \in L^q$ telle que $T(f) = \displaystyle\int gfdm$, pour toute fonction $f \in L^p$.

3. Soit T_n l'application de L^p dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{Si } f \in L^p \text{ et } f \ge 0, \qquad T_n(f) = \inf_{\varphi \in L^p, 0 \le \varphi \le f} \Big(T(\varphi) + n \int (f - \varphi) dm \Big),$$
$$\text{si } f \in L^p \text{ est quelconque}, \quad T_n(f) = T_n(f^+) - T_n(f^-)$$

   Montrer que T_n vérifie les propriétés (1) à (4).

4. Montrer que T_n est linéaire .

5. En déduire que, pour toute forme linéaire continue positive T sur L^p, il existe une fonction g de L^q telle que $T(f) : \displaystyle\int fgdm$.

6. Montrer que, pour toute forme linéaire continue T sur L^p, il existe une fonction g de L^q telle que $T(f) = \displaystyle\int fgdm$. [*Décomposer T en une partie positive et une partie négative*].

■

On propose en exercice (voir exercice 6.11), une autre démonstration de ce théorème dans le cas $p < 2$. Notons aussi que la démonstration classique de ce résultat se fait par le théorème de Radon-Nikodym que nous exposons maintenant.
On commence par voir le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures (positives). On rappelle qu'une mesure m est dite de densité par rapport à λ (cf. définition 4.4) si il existe $f \in \mathcal{M}_+$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{R}$, on a : $m(A) = \displaystyle\int f1_A d\lambda = \int_A f d\lambda, \quad \forall A \in \mathcal{R}$.
Rappelons la définition d'une mesure absolument continue :

Définition 6.5 (Mesure absolument continue) *Soient (E,T,m) un espace mesuré et μ une mesure (positive ou signée) sur (E,T). On dit que μ est absolument continue par rapport à m, et on note $\mu << m$, si $\forall \ A \in T$, $m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.*

Théorème 6.6 (Radon-Nikodym) *Soient (E,T,m) un espace mesuré σ-fini et μ une mesure finie sur (E,T) ; alors μ est absolument continue par rapport à m si et seulement si μ est une mesure de densité par rapport à m. De plus, si $\mu = fm$ et $\mu = gm$, alors $f = g\, m$ p.p.*

DÉMONSTRATION : Soit (E,T,m) un espace mesuré $\sigma-$fini ; si ν est une mesure sur (E,T), on note $\mathcal{L}^p(\nu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,\nu)$ et $L^p(\nu) = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,\nu)$, $1 \le p \le +\infty$.

I.1 Soit μ une mesure de densité $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à m.

I.1.a Montrer que μ est absolument continue par rapport à m.

I.1.b On suppose que μ est également une mesure de densité $g \in \mathcal{M}_+$ par rapport à m, montrer que $f = g\, m$-p.p.

I.2 Soit μ une mesure finie sur (E,T), absolument continue par rapport à m. On va maintenant montrer que μ est nécessairement une mesure de densité par rapport à m. On considère pour cela l'espace de Hilbert $H = L^2(\mu+m)$, où $\mu+m$ est la mesure définie par $(\mu+m)(A) = \mu(A)+m(A), \forall\, A \in T$.

I.2.a Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1(\mu + m)$ si et seulement si $g \in \mathcal{L}^1(m) \cap \mathcal{L}^1(\mu)$. Montrer que si $g \in \mathcal{L}^1(\mu + m)$, alors : $\int gd(\mu + m) = \int gd\mu + \int gdm$.

I.2.b Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Soit $h \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ t.q. $g = h\,(\mu + m)$-p.p., montrer que $\int gd\mu = \int hd\mu$. En déduire qu'on peut définir une application L de H dans $\mathbb{R}$ par $L(g) = \displaystyle\int g\, d\mu$ pour $g \in H$ (dans le terme de droite, on a choisi un représentant de g). Montrer que $L \in H'$.

I.2.c Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$ t.q., pour tout $g \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$, on a $\varphi g \in \mathcal{L}^1(m) \cap \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\int g(1-\varphi)d\mu = \int g\varphi dm \tag{6.15}$$

I.2.d Soit φ définie dans la question précédente, montrer que :
(i) $\varphi \ge 0\, m$-p.p. et μ-p.p.. [*On pourra considérer* $B_n = A_n \cap \{\varphi < 0\}$, où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ est telle que $E = \cup_{n\in N} A_n$ et $m(A_n) < +\infty$, $\forall\, n \in N$.]

(ii) $\varphi < 1\, m$-p.p. et μ-p.p..

Remarquer que, en changeant éventuellement φ sur un ensemble de $(m+\mu)$-mesure nulle, on peut donc supposer que $0 \le \varphi < 1$ partout, et qu'on a toujours (6.15) pour tout $g \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$.

I.2.e Montrer que (6.15) est vraie pour $g = 1_A$, avec $A \in T$, $m(A) < +\infty$, puis pour tout $g \in \mathcal{M}_+$.

I.2.f Montrer que μ est une mesure de densité.

Théorème 6.7 (Radon-Nikodym, mesures signées) *Soit (E,T,m) un espace mesuré et soit μ une mesure signée sur (E,T), alors :*

$$\mu << m \Longleftrightarrow \exists f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \quad \mu = fm. \tag{6.16}$$

Définition 6.6 *Soit F un espace de Banach, F' son dual, et F'' son bidual. Pour $u \in F$, on définit $J_u \in F''$ par $J_u(T) = T(u)$. On appelle injection canonique de F dans son dual l'application définie de F dans F'' par $J(u) = J_u$. Si l'injection canonique est bijective, on dit que l'espace F est réflexif.*

Une conséquence directe du théorème 6.5 est que les espaces L^p, sont réflexifs pour $p \in]1,+\infty[$.

Proposition 6.9 *Soit (E,T,m) un espace mesuré, $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est réflexif.*

6.3 Notion de convergence faible

Définition 6.7 (Convergence faible dans un espace de Banach) *Soit $(F, \|.\|)$ un espace de Banach, et F' son dual topologique (i.e. l'espace des formes linéaire continues sur F) ; soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ et $u \in F$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u si pour tout élement T de F', on a : $T(u_n) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$).*

Par le théorème 6.5, on a donc la définition suivante de la convergence faible dans L^p, pour $1 \le p < +\infty$:

Définition 6.8 (Convergence faible dans L^p) *Soit (E,T,m) un espace mesuré, $p \in [1,+\infty[$ et q le conjugué de p, $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $u \in L^p$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers f si pour tout $g \in L^q$, on a : $\int f_n g dm \to \int f g dm$.*

Définition 6.9 (Convergence faible $*$ dans le dual d'un espace de Banach) *Soit $(F, \|.\|)$ un espace de Banach, et F' son dual topologique ; soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans F' pour la topologie faible $*$ si pour tout élement u de F, on a : $T_n(u) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$).*

Remarque 6.6 *Dans le cas où l'espace de Banach F est réflexif, la convergence faible $*$ et la convergence faible dans F' sont équivalentes...*

Dans le cas des espaces L^p, les seuls cas où la convergence faible $*$ est différente de la convergence faible sont $p = 1$ et $p = +\infty$. Dans le cas de L^∞, dual de L^1, on peut écrire la convergence faible $*$ de la manière suivante (grâce au théorème 6.5).

Définition 6.10 (Convergence faible $*$ dans L^∞)
Soit (E,T,m) un espace mesuré, $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ et $f \in L^\infty$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^∞ pour la topologie faible $*$ si pour tout élement g de L^1, on a : $\int f_n g dm \to \int f g dm$.

6.4 Exercices

Exercice 6.1 Soient (E,T,m) un espace mesuré, et f, g, h des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soient $p,q,r \in\ ]1,+\infty[$, tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=1$, montrer que :

$$\int |fgh|dm \le \Big(\int |f|^p dm\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int |g|^q dm\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int |h|^r dm\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Exercice 6.2 Soient (E,T,m) un espace mesuré, $p \in [1,+\infty]$ et q le conjugué de p (i.e. $q=\frac{p}{p-1}$), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(E,T,m)$ $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q(E,T,m)$, $f \in L^p(E,T,m)$ et $g \in L^q(E,T,m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p(E,T,m)$ et $g_n \to g$ dans $L^q(E,T,m)$ Montrer que $\int f_n g_n \to \int fgdm$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6.3 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=(n-n^2x)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathcal{R}$ des boréliens de $]0,1[$, et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{R},\lambda)$ pour $p \in [1,+\infty]$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans L^p pour $p > 1$.
3. Y-a-t'il convergence simple, convergence presque partout, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans L^p ($p \in [1,+\infty]$) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (justifier vos réponses...) ?
4. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a $\int f_n\varphi d\lambda \to \varphi(0)$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement dans L^1 (utiliser le fait que la mesure de Dirac n'est pas une mesure de densité, cf exercice 5.1).

Exercice 6.4 Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2 = L^2(E,T,m)$ et $f \in L^2$ t.q. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende faiblement vers f dans L^2, c. à. d.: $\int f_n\varphi dm \to \int f\varphi dm$ pour toute fonction $\varphi \in L^2$.

1. Montrer que $\|f\|_2 \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_2$.
2. On suppose de plus que $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans L^2.

Exercice 6.5 Soit (E,T,m) un espace mesuré, et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

1. On suppose ici qu' il existe A et $B \in T$ t.q. $A\cap B=\emptyset$, et $0 < m(A) < +\infty$, $0 < m(A) < +\infty$. Montrer que L^p est un Hilbert ssi $p=2$. [*On pourra utiliser l'identité du parallèlogramme avec des fonctions de L^p bien choisies*]
2. Montrer que pour $m=\delta_0$ (mesure de Dirac en 0), L^p est un Hilbert pour tout $p \in [1,+\infty]$.

Exercice 6.6 Soient (E,T,m) un espace mesuré t.q. $m(E) < +\infty$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2 = L^2(E,T,m)$ telle que :

(i) la suite $(\|f_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

(ii) $f_n \to f$ $\displaystyle\int f_n g dm \to \int fgdm$ quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in L^2$ et $\|f\|_2 \le \sup\limits_{n\ge 1} \|f_n\|_2$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, on note $B_n = \{x \in E; |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$. Montrer que $m(B_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. [*On pourra introduire* $A_p = \bigcup_{n \geq p} B_n$ *et montrer que* $m(A_p) \to 0$ *quand* $p \to +\infty$.]

3. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to +\infty$.
[*On pourra écrire* $\int |f_n - f| dm = \int_{|f_n - f| > \varepsilon} |f_n - f| dm + \int_{|f_n - f| \leq \varepsilon} |f_n - f| dm$.]

4. Montrer, en donnant un exemple, que f_n peut ne pas converger dans L^2, quand $n \to +\infty$.

5. Montrer que, pour tout $g \in L^2$, on a :
$$\int f_n g \, dm \to \int f g \, dm \text{ quand } n \to +\infty \tag{6.17}$$
(on dit que $f_n \to f$ "faiblement" dans L^2). [*Décomposer* $\int (f - f_n) g dm$ *de manière semblable à la question 3.*]

Exercice 6.7 (Caractérisation de L^p)
Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, et $1 \leq p \leq +\infty$ Montrer que $f \in L^p(E, T, m)$ ssi $fg \in L^1(E, T, m)$ pour tout $g \in L^{p'}(E, T, m)$, avec $p' = \frac{p}{p-1}$.

Exercice 6.8 (un peu de calcul diff...)
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, et $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $1 \leq p < +\infty$; pour $u \in L^p = L^p(E, T, m)$, on note $g(u)$ la (classe de) fonction(s): $x \mapsto g(u(x))$, et G la fonction qui à u associe $g(u)$.

1. Soit $1 \leq q < +\infty$; montrer que $G \in C(L^p, L^q)$ ssi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $G \in C^1(L^p, L^p)$ ssi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $g(s) = as + b$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.9 Soient (E, T, m) un espace mesuré t.q. $m(E) < +\infty$ et $p \in [1, +\infty]$. Pour $r \in [1, +\infty]$, on note $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\|.\|_r$ la norme usuelle sur L^r. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$, telle que :

(i) la suite $(\|f_n\|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée,

(ii) $f_n \to f$ pp quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in L^p$ et $\|f\|_p \leq \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_p$.

2. On suppose (dans cette question seulement) que $p > 1$. Soit $r \in [1, p[$, montrer que $f_n \to f$ dans L^r quand $n \to +\infty$.

3. Soit q le conjugué de p (i.e. tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), montrer que, pour tout $g \in L^q$, on a :
$$\int f_n g \, dm \to \int f g \, dm \text{ quand } n \to +\infty.$$
Peut-on dire que $f_n \to f$ "faiblement" dans L^p ?

Exercice 6.10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue à support compact, montrer que :

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)} \to \|f\|_\infty \text{ lorsque } p \to +\infty.$$

[*Pour montrer que* $\liminf_{p\to+\infty}\|f\|_{L^p(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)} \geq \|f\|_\infty$, *on pourra introduire, pour* $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, *un ensemble* A_ε *tel que* $\forall\, x \in A_\varepsilon$, $|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon$.]

Exercice 6.11 (Dualité $L^p - L^q$)
Lorsque $p < 2$, on propose d'étudier la démonstration suivante de la dualité $L^p - L^q$: soit $T \in (L^p)'$;

1. On considére d'abord le cas où $m(E) < +\infty$:
   (a) Montrer que $L^2 \subset L^p$ et que l'injection canonique de L^2 dans L^p est continue.
   (b) En déduire que il existe $g \in L^2$ telle que $T(f) = \int fgdm, \;\; \forall \;\; f \in L^2$.
   (c) Montrer que $g \in L^q$ (distinguer les cas $p > 1$ et $p = 1$. Dans le cas $p > 1$, on pourra considérer les fonctions $f_n = |g|^{(q-2)}g1_{\{|g|\leq n\}}$. Dans le cas $p = 1$, prendre $f = sgn(g)1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.
   (d) Si $f \in L^p$, montrer que $f_n = f1_{\{|f|\leq n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^q$ telle que $T(f) = \int fgdm, \;\; \forall \;\; f \in L^p$.
2. On considére maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Comme m est σ-finie, on peut écrire $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, avec $An \subset A_{n+1}$ et $m(A_n) < +\infty$.
   (a) A n fixé, définir à partir de T une application linéaire continue $T_n \in \Big(L^p(A_n)\Big)'$ telle que : $\exists g_n \in L^q(A_n) \;\; ; T_n(f) = \int_{A_n} fgdm, \;\; \forall f \in L^p(A_n)$.
   (b) Montrer que si $m \geq n$, $g_n = g_m$ *pp* sur A_n.
   (c) On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n.
   (i) Montrer que $g \in L^q(E)$. (Distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$.)
   (ii) Montrer que $T(f) = \int fgdm, \;\; \forall \;\; f \in L^p$.

Exercice 6.12 Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

1. On suppose que $g_n \to g$ dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.
2. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p.. Montrer par un contre exemple qu'on peut ne pas avoir $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.
3. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p.et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\|g_n\|_\infty \leq M$. Montrer qu'on a alors $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

Exercice 6.13 Soit (E,T,m) un espace mesuré et μ une mesure de densité $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à m, montrer que :

$$\begin{array}{ll} (i) & \int g d\mu = \int f\, g\, dm, \forall\, g \in \mathcal{M}_+ \\ (ii) & \text{Soit } g \in \mathcal{M}, \text{ alors } g \in L^1(\mu) \Longleftrightarrow fg \in L^1(m), \\ & \text{et si } g \in L^1(\mu), \text{ alors } \int g d\mu = \int f\, g\, dm \end{array} \tag{6.18}$$

Chapter 7

Produits d'espaces mesurés

7.1 Motivation

Au chapitre 1, on a introduit la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens, $\mathcal{R}$, de $\mathbb{R}$, ce qui nous a permis d'exprimer la notion de longueur d'une partie (borélienne) de $\mathbb{R}$. On peut se poser la question de savoir s'il existe une mesure sur $\mathbb{R}^2$ qui exprimerait la notion de surface, et une mesure sur $\mathbb{R}^3$ qui exprimerait la notion de volume... La question est donc : existe-t-il une mesure λ_2, de $\mathcal{R}_2$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\mathcal{R}_2$ est une tribu sur $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, vérifiant :

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B), \forall \;\; A, B \in \mathcal{R}. \tag{7.1}$$

Pour définir λ_2, il est d'abord nécessaire de définir la tribu $\mathcal{R}_2$ sur $\mathbb{R}^2$, contenant $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$... En effet, $\mathcal{R} \times \mathcal{R} = \{A \times B, A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{R}\}$ n'est pas une tribu, on définit $\mathcal{R}_2$ comme la tribu engendrée par $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, qu'on note $\mathcal{R} \bigotimes \mathcal{R}$.
On cherche alors une mesure $\lambda_2 : \mathcal{R}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que $\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B), \forall \;\; A, \;\; B \;\in\; \mathcal{R}$. On peut montrer l'existence et l'unicité de la mesure λ_2. On peut aussi montrer que la tribu $\mathcal{R}_2$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$, c.à.d. la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Une autre question qu'on abordera dans ce chapitre concerne l'intégration des fonctions à plusieurs variables. Considérons par exemple une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sous quelles hypothèses peut-on écrire :

$$\int \Big(\int f(x,y)dy\Big)dx = \int \Big(\int f(x,y)dx\Big)dy \;\; ? \tag{7.2}$$

La réponse à cette question est apportée par le théorème de Fubini, que nous verrons dans ce chapitre.
On introduira aussi le produit de convolution de deux fonctions, qui sera utile en analyse pour les théorèmes de densité.

7.2 Mesure produit

On rappelle ici qu'un espace mesuré (E, T, m) est σ-fini si il existe une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, et $m(A_n) < +\infty, \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}$. L'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ est σ-fini (prendre $A_n = [-n, n]$).

7.2.1 Définitions

Définition 7.1 (Tribu produit) *Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) des espaces mesurables, et $E = E_1 \times E_2$; on appelle tribu produit la tribu sur E engendrée par $T_1 \times T_2$. Cette tribu produit est notée $T_1 \bigotimes T_2$.*

Proposition 7.1 (Mesure produit) *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) deux espaces mesurés σ-finis, $E = E_1 \times E_2$, et $T = T_1 \bigotimes T_2$; il existe une et une seule mesure m sur T vérifiant :*

$$m(A \times B) = m_1(A)m_2(B), \forall A \in T_1, \forall B \in T_2. \tag{7.3}$$

Cette mesure est notée $m = m_1 \bigotimes m_2$. De plus, m est σ-finie.

Définition 7.2 (Espace produit) *L'espace (E, T, m), construit dans la proposition précédente, s'appelle l'espace (mesuré) produit des espaces (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2).*

7.2.2 Théorème de Fubini et conséquences

Théorème 7.1 (Fubini-Tonelli) *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis. On note (E, T, m) l'espace produit. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable (i.e. T-mesurable). Alors :*

$$\int f dm = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2). \tag{7.4}$$

Corollaire 7.1 *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis. On note (E,T,m) l'espace produit. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction T-mesurable. Alors :*

$$f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \Longleftrightarrow \int \Big(\int |f| dm_2 \Big) dm_1 < +\infty \Longleftrightarrow \int \Big(\int |f| dm_1 \Big) dm_2 < +\infty. \tag{7.5}$$

Théorème 7.2 (Fubini) *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis. On note (E, T, m) l'espace produit. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable (i.e. T-mesurable) et intégrable pour la mesure m, i.e. $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors :*

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2) = \int f dm \tag{7.6}$$

Corollaire 7.2 *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis, (E,T,m) l'espace produit, et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction T-mesurable telle que :*

$$\int \Big(\int |f(x_1, x_2)| dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) < +\infty \tag{7.7}$$

ou

$$\int \Big(\int |f(x_1, x_2)| dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2) < +\infty. \tag{7.8}$$

Alors :

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2). \tag{7.9}$$

Remarque 7.1 (contre-exemple lié au théorème de Fubini) On cherche ici à construire une fonction pour laquelle la conclusion du théorème de Fubini n'est pas vérifiée : soient a une fonction (continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = a(x)$ si $x \geq 0$ et $x \leq y < 2x$, $f(x, y) = -a(x)$ si $x \geq 0$ et $2x \leq y < 3x$, $f(x, y) = 0$ si $x < 0$ ou $x \geq 0$ et $y \notin [x, 3x]$. Le lecteur pourra montrer que les hypothèses du théorème de Fubini ne sont vérifiées que si $xa(x) \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$. En prenant par exemple $a(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, on montrera que : $\int \Big(\int f(x, y) dy \Big) dx \neq \int \Big(\int f(x, y) dx \Big) dy$ (voir l'exercice 7.2).

7.2.3 Cas de la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$

De la même manière qu'on peut définir λ_2 sur la tribu $\mathcal{R}_2$ des boréliens de $\mathbb{R}^2$, on définit par récurrence $\mathcal{R}_N = \mathcal{R}_{N-1} \bigotimes \mathcal{R}$, $\mathcal{R}_N$ est aussi la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^N$, i.e. la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^N$, et λ_N, mesure de Lebesgue sur $\mathcal{R}_N$. On note $L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$, et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on note $\displaystyle\int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x)dx$. La mesure de Lebesgue possède les propriétés suivantes :

1. Si $K \in \mathcal{R}_N$ est un borné de $\mathbb{R}^N$, alors $\lambda_N(K) < +\infty$.
2. Si O est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, $\lambda_N(O) > 0$.
3. (*Régularité de* λ_N) Pour tout élément A de $\mathcal{R}_N$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :
$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda_N(O \setminus F) \leq \varepsilon. \tag{7.10}$$
4. Soient $A \in \mathcal{R}_N$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^N$, $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta, x \in A\} \in \mathcal{R}_N$, et $\lambda_N(\alpha A + \beta) = |\alpha|^N \lambda_N(A)$.

7.3 Convolution

Dans tout ce paragraphe, on considère des fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$, et on notera le symbole d'intégration $d\lambda_N(x) = dx$. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$; on voudrait définir la fonction "convolée" de f et g, c.à.d. la fonction "définie" par :

$$f * g(x) = \int f(t) g(x-t) dt. \tag{7.11}$$

La définition de cette fonction nécessite les deux conditions suivantes :

1. Il faut que la définition ne dépende pas du représentant choisi pour f et g, c.à.d. que si $f = f_1$ *pp* et $g = g_1$ *pp*, alors $f * g(x) = f_1 * g_1(x)$.
2. Pour définir $f * g$ en x, il faut que $t \to f(t)g(x-t)$ soit intégrable.

La condition 1. est satisfaite, car, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, si $f = f_1$ *pp* et $g = g_1$ *pp*, alors $f(.)g(x-.) = f_1(.)g_1(x-.)$ *pp*. Donc $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ssi $f_1(.)g_1(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, et donc, si $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f * g(x) = f_1 * g_1(x)$.
Pour montrer que la condition 2 est satisfaite, on montre dans la proposition suivante que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$

Proposition 7.2 (Convolution) *Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors :*

- *pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable ; on pose donc : $f * g(x) = \displaystyle\int f(t)g(x-t)dt$. la fonction $f * g$ est donc définie pp.*
- $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$,
- $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Démonstration : On applique Fubini-Tonelli à $F : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$, définie par $F(x,t) = f(t)g(x-t)$

Remarque 7.2 On a vu précédemment que $L^1(\mathbb{R}^N)$ muni de l'addition (loi de composition interne) et de la multiplication par un scalaire (loi de composition externe) est un espace de Banach. L'addition, la convolution (lois de composition interne) et la multiplication par un scalaire confèrent à $L^1(\mathbb{R}^N)$ la structure d'algèbre de Banach.
On sait aussi que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de l'addition, de la multiplication interne et de la multiplication par un scalaire est aussi une algèbre de Banach; en fait, nous montrerons par la suite qu'il existe un isomorphisme d'algèbre, appelé transformation de Fourier, entre $L^1(\mathbb{R}^N)$ et son image (par cette transformation) dans $C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$.

Remarque 7.3 Si f et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors on a évidemment $f * g = g * f$. Ceci découle de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

Proposition 7.3 (Régularisation par convolution)
Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ où $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telles aue $f1_K \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. Soit $g \in C^k_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, où $0 \le k \le +\infty$, alors $f * g$ est définie partout et $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION Soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C^k_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$;

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a: $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$.

On pose $f * g(x) = \int g(x-y)f(y)dy$. (Noter que on a aussi: $f * g(x) = \int f(x-y)gf(y)dy$.

2. Montrer que $f * g$ est continue.
3. Montrer que si $g \in C^k_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, alors $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$.

Proposition 7.4 . *Si f et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, et si f et g sont à support compact, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, et $f * g$ est à support compact.*

DÉMONSTRATION On désigne par $B(0,\alpha)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon α. Comme f et g sont à support compact, il existe a et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f(x) = 0$ si $x \in B(0,a)^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in B(0,b)^c$. Montrer que $f * g(x) = 0$ si $x \in B(0,a+b)^c$.

7.4 Formules de changement de variable

De la propriété 4. de la mesure de Lebesgue (voir paragraphe 3.2.3), on déduit facilement le résultat suivant (le montrer pour les fonctions caractéristiques, puis pour les fonctions de $\mathcal{E}_+$, les fonctions de $\mathcal{M}_+$ et enfin les fonctions de L^1) :

Proposition 7.5 *Soient $N \ge 1$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, $\beta \in \mathbb{R}^N$. $\forall \ f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (ou $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N,\mathcal{R}_N)$),*

$$\int f(x)dx = \int f(\alpha y+\beta)|\alpha|^N dy. \tag{7.12}$$

Le théorème suivant se montre par localisation et récurrence sur la dimension :

Théorème 7.3 (Formules de changement de variables) *Soient U et V des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$, et φ un C^1-difféomorphisme de U dans V (i.e. φ est une bijection de U dans V, $\varphi \in C^1$, $\varphi^{-1} \in C^1$). Alors, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (ou $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N,\mathcal{R}_N)$),*

$$\int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|DetD\varphi(y)|dy \tag{7.13}$$

où $D\varphi(y)$ désigne la matrice jacobienne de φ en y.

7.5 Exercices

Exercice 7.1
Soient m_1 et m_2 des mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ telles que $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, où $D = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $m_1 = m_2 = \delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a.

Exercice 7.2 (Contre-exemple à Fubini)
Soit $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \leq 2x \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } x \notin]x, 3x[\\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{7.14}$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{R}_2$- mesurable.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(.,y) \in L^1$; on pose $\varphi(y) = \displaystyle\int f(x,y) d\lambda(x)$. Montrer que $\varphi \in L^1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,.) \in L^1$; on pose $\psi(x) = \displaystyle\int f(x,y) d\lambda(y)$. Montrer que $\psi \in L^1$.
4. Montrer que $\displaystyle\int \varphi d\lambda \neq \int \psi d\lambda$.
5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique pas ici ?

Exercice 7.3 (Lemme de Bouchitté) Soit φ une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$, on définit l'application de $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ par:

$$\Phi(A,B) = \int\int_{A \times B} \varphi(|x-y|) dx dy.$$

Soient $A, B \in \mathcal{R}$, $a = \lambda(A)$, $b = \lambda(B)$ (λ est la mesure de Lebesgue) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < b$ tels que $A \subset [\alpha, \beta]$ et $B \subset [\alpha, \beta]$. Montrer que

$$\Phi(A,B) \geq \Phi([\alpha, \alpha + a], [\beta - b, b].$$

Exercice 7.4
Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, et f une application mesurable positive. Pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on pose: $F(t,x) = 1_{\{(t,x); 0 < t < f(x)\}}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{R} \otimes T$- mesurable
2. Montrer que:

$$\int f(x) dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) \geq t\}) dt.$$

[*Ecrire* $f(x) = \int_0^{f(x)} dt \ldots$]

Exercice 7.5 On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}_2, \lambda_2)$, et on définit $\pi = \lambda_2(\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\})$. Montrer que $\lambda_2(\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}) = \pi R^2$.

Exercice 7.6
Soient $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$, et $f \in L^1$, telle que $f = 0$ sur $\mathbb{R}_-$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f^{*n} par : $f^{*1} = f$ et $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$ pour $n \geq 1$. Pour $\lambda \geq 0$, on pose : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f(t)|dt$.

1. (a) Montrer que f^{*n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $f^{*n} = 0$ sur $\mathbb{R}_-$.
   (b) Montrer, par récurrence sur n, que :
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq (g(\alpha))^n, \forall\, \alpha \geq 0, \forall\, n \geq 1. \tag{7.15}$$
   (c) En déduire que :
$$\int_0^{x} |f^{*n}(t)|dt \leq e^{\alpha x}(g(\alpha))^n, \forall\, \alpha \geq 0, \forall\, n \geq 1, \forall\, x \geq 0. \tag{7.16}$$
2. Soit $h \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $h * f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $h * f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Remarquer de même que $h * f^{*n} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose maintenant que, $h = 0$ sur $\mathbb{R}_-$; montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h * f^{*n}(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 7.7 (Inégalité de Young) Soient $1 < p < +\infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $f * g$ est définie pp, $f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. *[Ecrire $\int(\int |f(x-y)g(y)|dy)^p dx = \int(\int |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|f(x-y)|^{\frac{1}{q}}|g(y)|dy)^p dx$, avec $q = \frac{p}{p-1}$. Appliquer l'inégalité de Hölder puis le théorème de Fubini-Tonelli].*

Exercice 7.8 Soient $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$ et $g \in L^q = L^q_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(.)g(x-.)$ est intégrable et que $f*g$ est définie partout. Montrer que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
2. Montrer que $f * g$ est continue.
3. En déduire que l'application $(f, g) \mapsto f * g$ est bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme du sup).
4. Montrer que $f * g \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini).
5. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$, c.à.d. $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$.
   (a) $f * g$ est-elle définie partout ?
   (b) A-t-on $f * g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
   (c) L'application $(f, g) \mapsto f * g$ est-elle continue de $L^1 \times L^\infty$ dans C_b?
   (d) A-t-on $f * g \in C_0$?

Exercice 7.9 Soient μ et ν des mesures sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. On définit $\mu * \nu$ par : $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x + y)d\mu(x)d\nu(y)$.

1. Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure.
2. Montrer que si μ et ν sont des probabilités, alors $\mu * \nu$ est une probabilité.
3. Montrer que si μ et ν sont des mesures de densités respectives f et g (par rapport à Lebesgue), alors $\mu * \nu$ est une mesure de densité $f * g$.

LP(RN,TRN,L)

Chapter 8

Séparabilité, densité et compacité dans les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$

8.1 Séparabilité de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$

Proposition 8.1 *Soit p tel que $1 \leq p < +\infty$. L'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ est séparable.*

DÉMONSTRATION Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $p = 0, 1, \ldots, 2n^2 - 1$, on note: $I^n_p = [-n + \frac{p}{n}, -n + \frac{p}{n}[$. On pose : $A_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f|_{I^n_p} = r$, où $r \in \mathbb{Q}$, et $f = 0$ sur $[-n, n[^c\}$. On pose $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.
2. Montrer que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans A et conclure par densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ (théorème 8.1).

Proposition 8.2 *L'espace $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ n'est pas séparable.*

DÉMONSTRATION Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note: $B_n = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda); f|_{]-n,n[} \in \{0, 1\}\}$. On pose $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.

1. Montrer qu'il existe une bijection entre B et $\{0, 1\}$, et donc que B est non dénombrable.
2. Soit A une partie dense de $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{R}, \lambda)$. Montrer que pour tout $f \in B$, il existe une unique fonction $g\ inA; \|f - g\| \leq \frac{1}{4}$. En déduire que $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{R}, \lambda)$ n'est pas séparable.

■

8.2 Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$

Dans tout cette section, on considèrera un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$, et $(E, T, m) = (\Omega, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$.

Densité des fonctions $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$

Définition 8.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que est à support compact dans Ω si il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $f = 0$ sur $\Omega \setminus K$.*

On note souvent $supp(f) = \overline{\{x \in \Omega \ ; f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$. On peut montrer que f est à support compact si et seulement si $supp(f)$ est compact.

Définition 8.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ si*

1. *f est de classe C^∞ de (Ω dans $\mathbb{R}$).*
2. *f est à support compact dans Ω.*

On note aussi $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarque 8.1 Si $N = 1$ et $\Omega =]0,1[$, la fonction f définie par $f(x) = x(x-1)$ est de classe C^∞ sur Ω, mais elle n'est pas à support compact. En effet, il n'existe pas de compact inclus dans $]0,1[$ telle que f soit nulle en dehors de ce compact.
Par contre, si f est de classe C^∞ sur $]0,1[$ et si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ si $x \in]0, \varepsilon[$ ou si $x \in]1-\varepsilon, 1[$, alors $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Théorème 8.1 (Densité de $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$) *Soit $p \in [1, +\infty[$, alors :*
$C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans L^p $(= L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}, \lambda_N))$, c.à.d. :

$$\forall \ f \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall \ \varepsilon > 0, \exists \ \varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \ ; \|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon. \tag{8.1}$$

Théorème 8.2 (Continuité en moyenne) *Soit $p \in [1, +\infty[$, et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$; alors $\|f(.+h) - f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$, c.à.d. : $\int |f(x+h) - f(x)|^p dx \to 0$ lorsque $h \to 0$.*
La démonstration des deux théorèmes précédents est similaire à la démonstration vue pour L^1 (section 5.3).

Remarque 8.2 (Attention à L^∞ !) Les deux résultats précédents sont faux dans L^∞. Considérer par exemple le cas $N = 1$ et la fonction $f = 1_{\mathbb{R}_+} (\in L^\infty)$; montrer que :

1. $\forall \ \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$
2. $\forall \ h > 0 \|f(.+h) - f\|_\infty = 1$.

Régularisation par convolution

Si $a \in \mathbb{R}_+$, on note B_a la boule fermée de centre 0 et de rayon a de $\mathbb{R}^N$.

Définition 8.3 (L^1_{loc}) *On définit l'espace des fonctions "localement intégrables", qu'on note $L^1_{loc}(= L^1_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N))$ par : $f \in L^1_{loc}$ si $f 1_K \in L^1$ pour tout compact $K \in \mathbb{R}^N$.*

Remarque 8.3

1. Pour p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (Hölder).
2. On peut définir de manière analogue $L^1_{loc}(A, \mathcal{R}_N, \lambda_N))$, pour tout $A \in \mathcal{R}^N$ (remplacer $\mathbb{R}^N$ par A dans la définition ci-dessus).

Définition 8.4 (Famille régularisante) *Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $\rho \geq 0$, $\{x \in \mathbb{R}^N \ ; \rho(x) \neq 0\} \subset B_1$, et telle que $\int \rho(x)dx = 1$. On appelle famille régularisante (ou famille de noyaux régularisants) la famille de fonctions $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ définie par : $\rho_n(x) = n^N \rho(nx), x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque 8.4 Dans la définition précédente, il est facile de vérifier que $\{x \in \mathbb{R}^N \ ; \rho_n(x) \neq 0\} \subset B_{\frac{1}{n}}$ et $\int \rho_n(x)dx = 1$, et qu'il existe des fonctions vérifiant les propriétés demandées pour ρ.

Lemme 8.1 *Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante et soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n$ est définie partout et $f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.*

Lemme 8.2 *Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante et soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\{x \in \mathbb{R}^N \ ; f(x) \neq 0\} \subset B_a$ (la fonction f est donc à support compact), alors $f * \rho_n$ est à support compact et $\{x \in \mathbb{R}^N \ ; f * \rho_n(x) \neq 0\} \subset B_{a+\frac{1}{n}}$.*

Lemme 8.3 *Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ alors $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$.*
Le trois lemmes précédents permettent de démontrer le théorème de densité suivant :

Théorème 8.3 *Soit $p \in [1, +\infty[$, $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.*
La démonstration se fait par troncature et régularisation.

Densité des fonctions $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

On a aussi un résultat de densité pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 8.4 (Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$) *Soient $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$; alors $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*
DEMONSTRATION On se ramène au cas précédent en écrivant Ω comme l'union des ensembles compacts

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n \tag{8.2}$$

8.3 Compacité dans les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est (séquentiellement) compact si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge. Notons que cette notion de compacité "séquentielle" est équivalente à la notion ce compacité "de Borel -Lebesgue" (i.e. de tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini) dès que E est un espace métrique.
Une partie A de E est dite relativement compacte si son adhérence est compacte (ou encore si il existe un compact K de E tel que $A \subset K$).
Dans le cas où E est un espace de dimension finie, A est compacte si et seulement si A est fermée bornée, et A est relativement compacte si et seulement si A est bornée.

Ces deux caractérisations sont fausses si $\dim(E) = +\infty$. On sait par le théorème de Riesz que la boule unité fermée d'un evn E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.
On s'intéresse ici au cas $E = L^p(\Omega)$, espace vectoriel normé de dimension infinie, et on voudrait caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ? Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée). La deuxième condition est, pour $1 \leq p < +\infty$, que la partie soit équicontinue en moyenne, au sens précisé dans le théorème suivant :

Théorème 8.5 (Kolmogorov) *Soit $\Omega \in \mathcal{R}_N$ et $1 \leq p < +\infty$; on considère ici l'espace mesuré $(E, T, m) = (\Omega, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$. Soit $A \subset L^p(\Omega)$; A est relativement compacte si et seulement si :*

1. $\exists C \in \mathbb{R}\ ; \|f\|_p \leq C \quad \forall \ f \in A$
2. *la partie A est équicontinue en moyenne, c.à.d. :* $\forall \ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ ; |h| \leq \delta \Rightarrow \|\tilde{f}(.+h) - \tilde{f}\|_p \leq \varepsilon$, $\forall \ f \in A$,
3. *la partie A est "équimédiocre à l'infini", c.à.d. :* $\forall \ \varepsilon > 0$, $\exists \ a \in \mathbb{R}_+$, *tel que* $\displaystyle\int_{B_a^c} |\tilde{f}|^p dm \leq \varepsilon$, $\forall \ f \in A$,

où $\tilde{f}$ est la prolongée de f par 0 en dehors de Ω.
La démonstration de ce théorème se fait en utilisant la densité de l'espace de fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$, et le théorème d'Ascoli, que nous rappelons ici :

Théorème 8.6 (Ascoli) *Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}$ et A une partie de l'espace vectoriel $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; A est relativement compacte si et seulement si A est bornée et uniformément équicontinue, i.e.* $\forall \ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ ; \forall \ x, y \in K, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, $\forall \ f \in A$.

Corollaire 8.1 *Soient $\Omega \in \mathcal{R}_N$, $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$; on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant dans $L^p(\Omega)$ si la famille $A = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 du théorème de Kolmogorov.*

8.4 Propriété de compacité faible

On a introduit au chapitre 6 la convergence faible $*$ dans le dual d'un esapce de Banach. On a une propriété de compacité très utile lorsque l'espace de Banach considéré est séparable :

Proposition 8.3 (Compacité faible-$*$ séquentielle des bornés du dual d'un séparable)
Soit $(F, \|.\|)$ un espace de Banach séparable, et F' son dual topologique ; soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de F' ; alors il existe une sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $T \in F'$ telle que la sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans F' pour la topologie faible $*$ (i.e. $T_{n_k}(u) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$) pour tout élement u de F.)

DÉMONSTRATION : procédé diagonal...
Cette propriété s'applique donc aux suites bornées de L^∞ ; en effet, l'espace L^∞ est le dual d'un séparable (l'espace L^1) grâce au théorème 6.5 et à la proposition 8.1). On a donc elle s'écrit :

Proposition 8.4 (Compacité faible $*$ séquentielle des bornés de L^∞)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_\infty \leq M$ p.p. , alors il existe $u \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ t.q. $u_n \to u$ dans L^∞ pour la topologie faible $*$.

Dans le cas $p \in [1, +\infty[$, on peut écrire une propriété de compacité faible :

Proposition 8.5 (Compacité faible séquentielle des bornés de L^p)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$, $p \in]1, +\infty[$, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_p \leq M$ p.p. , alors il existe $u \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ t.q. $u_n \to u$ dans L^p pour la topologie faible, c.à.d. t.q. $\int (u_n v - uv) dm \to 0$ pour tout $v \in L^q$, où $q = \frac{p}{p-1}$.

8.5 Exercices

Exercice 8.1 On note $L^2 (= L^2(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ où $\mathcal{R}$ est la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue. On note $dt = d\lambda(t)$. Pour $f \in L^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $T_k f$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$T_k f(x) = k \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f(t) dt, \tag{8.3}$$

où n est l'entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{n}{k} \leq x < \dfrac{n+1}{k}$.

1. Soit $f \in L^2$, montrer que $T_k f \in L^2$ et que $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (i.e. f continue à support compact). Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2.
3. Soit $f \in L^2$ (i.e. f continue à support compact). Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2.

Chapter 9

Vecteurs aléatoires, variables aléatoires indépendantes

9.1 Définitions

Définition 9.1 (Vecteur aléatoire) *On appelle vecteur aléatoire une fonction mesurable d'un espace probabilisable* (E, T) *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N)$. *Si* p *est une probabilité sur* (E, T), *on appelle loi de probabilité du vecteur aléatoire, qu'on note* p_X *la probabilité sur* $\mathcal{R}_N$ *image par* X *de* p.

Remarque 9.1 Soient (E, T) un espace mesurable et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de variables alátoires de (E, T) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. Alors l'aplication X définie de E dans $\mathbb{R}^N$ par : $(x, \ldots, x) \mapsto X(x) =(X_1(x),$-$\ldots,X_N(x))$ est mesurable (voir exercice 9.1), et c'est donc un vecteur aléatoire. On appelle probabilité conjointe de la famille la loi de probabilité du vecteur aléatoire X.

Définition 9.2 (Loi de probabilité) *Soit* X *un vecteur aléatoire de* (E, T, p) *dans* $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N)$. *On appelle loi de probabilité* p_X *du vecteur* X *l'image par* X *de la probabilité* p, *c.à.d.:* $p_X(A) = p(X^{-1}(A))$. *Si* $X = (X_1, \ldots, X_N)$, *la probabilité* p_X *est appelée loi conjointe de* $(X_1, \ldots, X_N)$.

Définition 9.3 (i-ème projecteur) *On appelle i-ème projecteur de* $\mathbb{R}^N$ *l'application* π_i, *de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}$, *qui a un vecteur de* $\mathbb{R}^N$ *fait correspondre sa i-ème composante dans la base canonique de* $\mathbb{R}^N$.

Définition 9.4 (Probabilité marginale) *Soit* X *un vecteur aléatoire de d'un espace probabilisé* $(E,$-$T,p)$ *dans* $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N)$, *on appelle i-ème probabilité marginale d'un vecteur aléatoire* X *la mesure image de* p_X *par le i-ème projecteur* π_i, *et on la note* p_{X_i}.

Remarque 9.2 Soit $X = (X_1, \ldots, X_N)$ un vecteur aléatoire, de loi de probabilité p_X ; soit $B \in \mathcal{R}$, par définition de la loi marginale, on a :

$$p_{X_i}(B) = p_X(\pi^{-1})(B)) = p(X^{-1}(\pi^{-1}(B))).$$

Comme $X_i = \pi_i \circ X$, on a donc :

$$p_{X_i}(B) = p(X_i^{-1}(B)).$$

La probabilité p_{X_i} est donc aussi la loi de la variable aléatoire X_i, ce qui justifie la notation.

Remarque 9.3 La connaissance de p_X entraîne la connaissance des p_{X_i}. La réciproque est en général fausse.

On définit la densité d'une loi de manière analogue au cas scalaire.

Définition 9.5 (Loi de densité) *Soit p une probabilité sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N)$, on dit que p est une probabilité de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) s'il existe $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$ telle que $p = f\lambda_N$.*

De même que dans le cas scalaire, on a un théorème qui permet de calculer des intégrales par rapport à la loi image :

Théorème 9.1 (Loi image) *Soit (E, T, p) un espace probabilisé, X un vecteur aléatoire sur (E, T), et p_X la loi du vecteur aléatoire X (i.e. $p_X(A) = p(X^{-1}(A)), \forall A \in T$. Soit $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (fonction mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$). Alors:*

1. *$\varphi \circ X \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, p)$ ssi $\varphi \in L\_\mathbb{R}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, p_X)$*
2. *Si $\varphi \circ X \in L^1(E, T, p)$, alors $\int_E \varphi \circ (x) dp(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(s) dp_X(s)$*

Définition 9.6 (Fonction de répartition) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $X = (X_1, \ldots, X_N)$ un vecteur aléatoire sur (E, T), de loi p_X. On appelle fonction de répartition du vecteur aléatoire la fonction définie de $\mathbb{R}^N$ dans $[0, 1]$ par : $F_X(t_1, \ldots, t_n) = p([X_1 \le t_1, \ldots, X_n \le t_n])$.*

Proposition 9.1 *Soit X un vecteur aléatoire de fonction de répartition F_X. Alors :*

1. *$0 \le F_X \le 1$;*
2. *Si $t \le t'$ (i.e. $t_i \le t'_i, \forall i = 1, \ldots, N$) ;*
3. *F_X est continue à droite en tout point ;*
4. *$F_X(t_1, \ldots, t_N) \to 1$ lorsque $(t_1, \ldots, t_N) \to (+\infty, \ldots, +\infty)$;*
5. *$F_X(t_1, \ldots, t_N) \to 0$ lorsque $t_i \to -\infty$ (à i fixé).*

Proposition 9.2 *Soit X un vecteur aléatoire de fonction de répartition F_X. Si $F_X \in C^N(\mathbb{R}^N, [0, 1])$, alors p_X est une probabilité de densité dont la densité est donnée par :*

$$\frac{\partial^N F}{\partial dx_1 \ldots \partial dx_N}. \tag{9.1}$$

Définition 9.7 (Espérance) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $X = (X_1, \ldots, X_N)$ un vecteur aléatoire sur (E, T) tel que $\int |X_k(x)| dp(x) < +\infty$. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^N$, l'application X_v de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $X_v(x) = X(x).v$ (produit scalaire de $X(x)$ avec v est une variable aléatoire réelle. Si, pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, X_v admet une espérance, on définit l'espérance du vecteur aléatoire $E(X)$ comme la forme linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ définie par $v \mapsto E(X_v)$. Cette forme linéaire est évidemment continue, et donc, par le théorème de représentation de Riesz, il existe un vecteur de $\mathbb{R}^N$, encore noté $E(X)$, tel que $E(X_v) = E(X).v$ pour tout $v \in \mathbb{R}^N$.*

Remarque 9.4 Si on décompose le vecteur aléatoire sur une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$, $X =(X_1,\ldots,$-$X_N)$, on montre facilement que $(E(X))_i = (E(X_i))$ en prenant pour v le i-ème vecteur de base dans la définition ci-dessus.

Définition 9.8 (Variance, covariance) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $X = (X_1, \ldots, X_N)$ un vecteur aléatoire sur (E, T) tel que, pour toute forme linéaire continue φ sur $\mathbb{R}^N$, la variable aléatoire $\varphi \circ X$ a une variance finie ; on appelle variance la forme quadratique positive sur le dual de $\mathbb{R}^N$ définie par:*

$$
\begin{aligned}
Var_X : (\mathbb{R}^N)' &\to \mathbb{R} &\quad (9.2)\\
\varphi &\mapsto Var_X(\varphi) = \int_E (\varphi \circ X(x) - \varphi(E(X)))^2 dp(x). &\quad (9.3)
\end{aligned}
$$

La matrice de Var_X dans la base canonique de $\mathbb{R}^N$ qu'on appelle "matrice des covariances", est donnée par : $C_{ij} = C_{ji} = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$.On remarque facilement que C_{ii} est la variance de la variable aléatoire réelle X_i. Pour $i \neq j$, on appelle le coefficient C_{ij} la covariance des variables aléatoires X_i et X_j.

Exemple : la variable aléatoire gaussienne Soit X un vecteur aléatoire de (E, T, p) à valeurs dans $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N)$. On dit que X suit la loi de Gauss si la loi de probabilité de X, p_X, est la probabilité de densité $f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp -\frac{1}{2}\frac{|x|_2^2}{\sigma^2}$, avec $x \in \mathbb{R}^N$ et $|.|_2$ désigne la norme euclidienne.

9.2 Indépendance, loi faible des grands nombres

Définition 9.9 (Indépendance des variables aléatoires)
Soient X et Y des variables aléatoires d'un espace probabilisé (E,T,p) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. On dit que X et Y sont indépendantes si les tribus engendées par X et Y sont indépendantes (cf définition 2.23, p. 28). (On rappelle que la tribu engendrée par X est l'ensemble $T_X = \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{R}\}$).

Théorème 9.2 *Soit (E, T, p) un espace probabilisé.*

1. *Soient X et Y deux vecteurs aléatoires indépendants de (E, T, p) dans $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N)$, et f et g des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N)$ dans $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N)$. Alors :*
$$E(f \circ X.g \circ Y) = E(f \circ X).E(g \circ Y) \;; \tag{9.4}$$
2. *Soient $X = (X_1, \ldots, X_n)$, un système de variables aléatoires deux à deux indépendantes, alors :*
$$E(X_i.X_j) = E(X_i).E(X_j) \text{ et } cov(X_i.X_j) = 0. \tag{9.5}$$
3. *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des vecteurs aléatoires indépendants, alors :*
$$\sigma^2(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i). \tag{9.6}$$

DÉMONSTRATION Utiliser le théorème de la loi image (théorème 9.1 p. 106).et le théorème de Fubini (théorème 7.2 p. 94).

Proposition 9.3 (Loi faible des grands nombres) *Soit (E, T, p) un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même moyenne $m = E(X_i)$ et de même variance $\sigma^2 = \sigma^2(X_i)$. On pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (c'est la "moyenne de Césaro" des X_i), alors Y_n converge stochastiquement (ou en probabilité), vers la variable aléatoire constante et égale à m, c.à.d. qu'on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, p(|X_n - m| > \varepsilon) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

DÉMONSTRATION Appliquer l'inégalité de Bienaymé Tchebychev…

9.3 Somme de variables aléatoires indépendantes

9.3.1 Convolution des mesures

Commençons par la propriété suivante :

Lemme 9.1 *Soient $f, g \in L^1_{loc}$, t.q. $\int f\varphi d\lambda = \int g\varphi d\lambda$, $\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors $f = g$ p.p.*

DÉMONSTRATION : par régularisation, on montre que si $\int f\varphi d\lambda = \int g\varphi d\lambda$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $f = g$ pp ; pour cela, on introduit la famille de noyaux régularisants $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir définition 8.4), et on considére la suite de fonctions $\psi_n = f * \rho_n = g * \rho_n$ qui tend vers f (et g) dans L^1. ■

Remarque 9.5 Soient f et $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ t.q. $\int f d\lambda = \int g d\lambda = 1$, et soient μ et ν des mesures de densité respectives par rapport à la mesure de Lebesgue. On a vu précédemment (cf 7.3 que $f * g \in L^1$; de plus, on peut facilement démontrer que $\int f * g d\lambda = 1$. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, calculons $\int f * g\varphi d\lambda$:

$$\int f * g\varphi d\lambda = \int\int f(s)g(t-s)ds\varphi(t)dt.$$

Par le changement de variable $t - s = u$, on obtient :

$$\int f * g\varphi d\lambda = \int\int f(s)g(u)ds\varphi(s+u)du.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient donc :

$$\int f * g\varphi d\lambda = \int (\int \varphi(x+y)d\mu(x))\delta\nu(y).$$

De par la remarque preécédente et le lemme 9.1, on peut donc définir le produit de convolution de deux probabilités $\mu = f\lambda$ et $\nu = g\lambda$ comme la probabilité τ de densité $f * g$ par rapport à Lebesgue, et qui vérifie donc, pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\int \varphi d\tau = \int \varphi f * g d\lambda = \int f(s)(\int g(t)\varphi(s+t)dt)ds. \tag{9.7}$$

De manière plus générale, on peut définir le produit de convolution de mesures par le théroème de Riesz.

Définition 9.10 *Soient μ et ν des mesures de Radon (i.e. des formes linéaires continues sur $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit, l'application L de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$L(\varphi) = \int\int \varphi(x+y)d\mu(x)d\nu(y), \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \tag{9.8}$$

L'application L est une forme linéaire continue sur $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par le théorème de Riesz, il existe donc une mesure de Radon, notée τ, et appelée mesure convolée de μ et ν, telle que :

$$L(\varphi) = <\tau, \varphi>_{M(\mathbb{R}), C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \int \varphi(s)d\tau(s). \tag{9.9}$$

Remarque 9.6 On peut aussi définir directement la convolée de deux mesures abstraites et retrouver les propriétés ci-dessus, voir à ce sujet l'execice 7.9

Remarque 9.7 *Remarquons que si μ et ν sont des mesures de densité respectives f et g, alors la convolée τ de μ et ν est une mesure de densité $f * g$.*

9.3.2 Loi de la somme de variables aléatoires indépendantes

Proposition 9.4 *Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes d'un espace probabilisé (E,T,p) dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$, de lois respectives p_X et p_Y alors $p_{X+Y} = p_X * p_Y$.*

à suivre...

9.4 Espérance conditionnelle

Définition 9.11 *Soient (E,T,p) un espace probabilisé, $A \in T$ et X une variable aléatoire de (E,T) dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$, intégrable ; on appelle espérance de X conditionnée par A la moyenne de X sur A, c'est à dire la quantité $\frac{1}{p(A)} \int X 1_A dp$.*

Soit (E,T,p) un espace probabilisé. On va définir maintenant l'espérance de X conditionnée par une tribu incluse dans T, ou espérance condtionnelle. Rappelons que si m est une mesure sur (E,T) et $f \in L^1(E,T,m)$, alors fm désigne la mesure de densité f par rapport à m (cf définition 4.4).

Définition 9.12 (Espérance conditionnelle par rapport à une tribu) *Soient (E,T,p) un espace probabilisé, $\mathcal{T}$ une sous-tribu de T, $p_{\mathcal{T}}$ la restriction de p à $\mathcal{T}$, et X une variable aléatoire de (E,T) dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$. Il existe un unique élément $e(X,\mathcal{T}) \in L^1_R(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$ telle que $e(X,\mathcal{T})p_{\mathcal{T}} = (Xp)_{\mathcal{T}}$ (où $e(X,\mathcal{T})p_{\mathcal{T}}$ désigne la mesure de densité $e(X,\mathcal{T})$ par rapport à $p_{\mathcal{T}}$, et $(Xp)_{\mathcal{T}}$ la restriction à $\mathcal{T}$ de la mesure de densité X par rapport à p).*

Démonstration :
Soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu de T (c.à.d. $\mathcal{T} \subset T$ et $\mathcal{T}$ est une tribu). On définit la restriction $p_{\mathcal{T}}$ de p à $\mathcal{T}$ par $p_{\mathcal{T}}(A) = p(A)$ pour tout $A \in \mathcal{T}$. Noter que $(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$ est aussi un espace probabilisé.

1

- 1.a Soit Y une variable aléatoire de $(E,\mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$, montrer que Y est une variable aléatoire de (E,T) dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$.
- 1.b Soit $p \leq 1 \leq +\infty$. Montrer que $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}}) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,p)$.
- 1.c Soient $p \leq 1 \leq +\infty$, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$ et $\psi \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$ un élément de (la classe) f. On note $i_p(f)$ l'élément de $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,p)$ auquel appartient ψ. Montrer que $i_p(f)$ est bien défini, i.e. ne dépend pas du choix de ψ dans f. Montrer que i_p est une isométrie de $L^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$ sur $i_p(L^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})) \subset L^p_{\mathbb{R}}(E,T,p)$. Dans la suite, on confond $i_p(f)$ et f pour tout $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$, de sorte que $L^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}}) \subset L^p_{\mathbb{R}}(E,T,p)$...
- 1.d Si T est la tribu complétée de $\mathcal{T}$, montrer que $L^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}}) = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,p)$, et que, si $\mathcal{T}$ n'est pas complète, $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}}) \neq \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,p)$.

2 Soit $X \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,p)$, t.q. $X \geq 0$ p-p.s. ; on rappelle que Xp est la mesure de densité X par rapport à p, et on note $(Xp)_{\mathcal{T}}$ la restriction de Xp à $\mathcal{T}$.

- 2.a Montrer que $(Xp)_{\mathcal{T}}$ est une mesure finie sur $(E,\mathcal{T})$, absolument continue par rapport à $p_{\mathcal{T}}$.
- 2.b Montrer qu'il existe un unique élément $e(X,\mathcal{T}) \in L^1_R(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$ telle que $e(X,\mathcal{T})p_{\mathcal{T}} = (Xp)_{\mathcal{T}}$ (où $e(X,\mathcal{T})p_{\mathcal{T}}$ désigne la mesure de densité $e(X,\mathcal{T})$ par rapport à $p_{\mathcal{T}}$).

3 Soit $X \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,p)$; montrer que $(Xp)_{\mathcal{T}}$ est une mesure signée sur $(E,\mathcal{T})$ et qu'il existe un unique élément $e(X,\mathcal{T}) \in L^1_R(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$ telle que $e(X,\mathcal{T})p_{\mathcal{T}} = (Xp)_{\mathcal{T}}$ (avec les mêmes notations que la question précédente).

4 Soient $X \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,p)$ et $B \in T$; on pose (dans cette question seulement) : $\mathcal{T} = \{\emptyset, B, B^c, E\}$.

4.a Soit Y une variable aléatoire de $(E,\mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$, montrer que Y est constante sur B et sur B^c.

4.b Montrer que si $p(B) > 0$ et $p(B^c) > 0$, alors

$$e(X,\mathcal{T}) = (\frac{1}{p(B)}\int_B Xdp)1_B + (\frac{1}{p(B^c)}\int_{B^c} Xdp)1_{B^c}$$

En déduire que si $X = 1_A$, où $A \in T$, alors : $e(X,\mathcal{T}) = p(A|B)1_B + p(A|B^c)1_{B^c}$.

4.c Montrer que si $p(B) = 0$ ou $p(B^c) = 0$, alors $e(X,\mathcal{T}) = E(X)1_E\, p_{\mathcal{T}}$-p.s. où $E(X)$ est l'espérance de X.

5 On suppose, dans cette question, que card$\mathcal{T}$ est fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$, t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ et $\mathcal{T}$ soit la tribu engendrée par $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$. Calculer $e(X,\mathcal{T})$.

6 Soient $X \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,p)$ et $Y \in L^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$; montrer que

$$\int XZdp = \int YZdp,\ \forall\ Z \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})\ \equiv Y = e(X,\mathcal{T}).$$

7

7.a Montrer que $L^2_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,p)$.

7.b Soit $X \in L^2_{\mathbb{R}}(E,T,p)$; montrer que $e(X,T) \in L^2_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$ et que $e(X,T)$ est la projection orthogonale dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,p)$ de X sur $L^2_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},p_{\mathcal{T}})$.

Théorème 9.3 *Soient (E,T,p) un espace probabilisé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de tribus sur E t.q. T_n- $\subset T_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} T_n = T$; soient $X \in L^2_{\mathbb{R}}(E,T,p)$, et $e(X,T_n)$ l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu T_n. Alors $e(X,T_n)$ converge vers X dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,p)$ lorsque $n \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION

1. Montrer qu'il existe $e \in L^2(E,T,p)$ t.q. il existe une sous-suite de $e(X,T_n)$, encore notée $e(X,T_n)$, qui converge faiblement vers e dans $L^2(E,T,p)$.
2. Montrer que $\int XYdp = \int eYdp$, $\forall y \in F = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} L^2_{\mathbb{R}}(E,T_n,p)}$
3. Montrer que $F = L^2_{\mathbb{R}}(E,T,p)$ et en déduire que $e = X\, p$ p.p.
4. Montrer que $\|e(X,T_n)\|_2 \leq \|X\|_2$ et en déduire que la suite $(e(X,T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,p)$.

Définition 9.13 *Soient (E,T,p) un espace probabilisé, X et $Y \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,p)$. On appelle espérance conditionnelle de X par rapport à Y l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu T_Y engendrée par Y (i.e. $T_Y = \{Y^{-1}(A), A \in \mathcal{R}\}$).*

9.5 Exercices

Exercice 9.1 Soient (E,T) un espace mesurable et $(f_k)_{k=1,\ldots,N}$ une famille de fonctions mesurables de (E,T) dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$. Montrer que l'application f définie de E dans $\mathbb{R}^N$ par : $(x,\ldots,x) \mapsto f(x) = (f_1(x),\ldots f_N(x))$ est mesurable.

Exercice 9.2 On reprend les hypothèses de l'exercice 4.27. Soit Y la longévité moyenne des 1000 ouvrières nées le 7 mai. Déterminer une valeur $x > 0$ pour laquelle on a une probabilité inférieure à 10^{-2} que $|Y - 45| > x$.

Exercice 9.3 (Problème de Buffon) On reprend les hypothèses de l'exercice 4.28. On suppose maintenant que $\ell = \frac{d}{2}$. On lance n fois l'aiguille: quelle est la loi de la variable aléatoire Z_n, qui représente le nombre de rencontres au cours des n lancers.
Soit F_n la fréquence des rencontres au cours des n lancers; estimer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff, le nombre de lancers permettant d'obtenir $|F - \frac{1}{\pi}| \le 0.05$ avec une probabilité d'au moins 0.99.

Exercice 9.4 On va montrer ici que la connaissance des lois de probabilité marginales ne détermine pas forcément la loi de probabilité. On considère pour cela l'espace probabilisable $(E,T) = (]0,1[\times]0,1[,\mathcal{R}_2)$ et on note λ_N la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{R}_N$, et $\delta_{(a,b)}$ la mesure de Dirac en (a,b). Soit p une probabilité sur (E,T), on note p_1 et p_2 ses probabilités marginales.

1. Soit $(a,b) \in E$. Montrer que $p = \delta_{(a,b)}$ si et seulement si $p_1 = \delta_a$ et $p_2 = \delta_b$.
2. Soit $p = \lambda_2$ sur (E,T). Montrer que $p_1 = p_2 = \lambda_1$ (sur $(]0,1[,\mathcal{R})$).
3. On pose $D = \{(t,1-t), t \in]0,1[\}$, et on définit l'application $f :]0,1[$ dans D par $f(t) = (t,1-t)$.
   (a) Montrer que f est mesurable.
   (b) On définit la probabilité p sur (E,T) par : $p(D^c) = 0$ et $p(A) = \lambda(f^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{R}_2, A \subset D$. Montrer que $p_1 = p_2 = \lambda_1$ et conclure.

Exercice 9.5 On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y qui ont pour loi de probabilité conjointe la loi dans le plan $\mathbb{R}^2$ de densité $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$ par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, σ étant un nombre réel donné. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = \max(|X|,|Y|)$?

Exercice 9.6 Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires d'un espace probabilisé (E,T,p) dans $(\mathbb{R},\mathcal{R})$ suivant des lois de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement, montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. (On rappelle que la loi de Poisson est donnée par $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$, où δ_k désigne la mesure de Dirac en k).

Exercice 9.7

1. Soient (E,T,m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q.:
   (H1) la série de terme général $\|f_n\|_2^2$ converge dans $\mathbb{R}$.
   (H2) $(f_n,f_m)_{L^2} = 0\ \forall n,m;\ n \neq m$.
   (a) Montrer que la série de terme général f_n converge dans L^2 vers une fonction $F \in L^2$.

(b) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_q = \{y \in E, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m, n, m > n > N$ et $|\sum_{p=n}^{m} f_p(y)| \geq \frac{1}{q}\}$. Montrer que $m(A_q) = 0$. En déduire que la série de terme général f_n converge vers F presque partout.

2. Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes sur (Ω, T). On note σ_n^2 la variance de la v.a.r. X_n, et on suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n^2 < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$. Montrer que la suite de v.a.r. S_n converge presque sûrement vers une v.a.r. S de variance finie, et que $\sigma^2(S_n - S) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Chapter 10

Transformation de Fourier, fonction caractéristique

10.1 Introduction et notations

La notion de série de Fourier (cf. cours d'Analyse Hilbertienne) permet d'analyser les fonctions définies d'un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La notion de transformée de Fourier permet d'analyser les fonctions définies de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^N$) dans $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier est une notion employée par exemple en théorie du signal et pour l'analyse des équations aux dérivées partielles.
Dans toute la suite, on considèrera l'espace mesuré $(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$, et on notera $d\lambda_N(x) = dx$.

Définition 10.1 ($L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$) *Soient f une fonction définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$, $Re(f)$ sa partie réelle et $Im(f)$ sa partie imaginaire. On dit que f est mesurable si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont mesurables. On dit que $f \in L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$ si $Re(f) \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$ et $Im(f) \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$. On note $L^p_{\mathbb{C}} = L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$, et on définit une norme sur $L^p_{\mathbb{C}}$ par :*

$$\|f\|_{L^p_{\mathbb{C}}} = \Big(\int |f|^p d\lambda_N\Big)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } 1 \leq p < +\infty, \tag{10.1}$$

où $|f| = \sqrt{\Big(Re(f)\Big)^2 + \Big(Im(f)\Big)^2}$ On montre facilement que $f \in L^p_{\mathbb{C}}$ si et seulement si $\|f\|_{L^p_{\mathbb{C}}} < +\infty$.

10.2 Transformation de Fourier dans L^1

10.2.1 Définitions et premières propriétés

Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$ et $t = (t_1, \ldots, t_N)^T \in \mathbb{R}^N$, on note le produit scalaire euclidien de x et t : $x.t = \sum_{i=1}^{N} x_i t_i$.

Définition 10.2 (Transformée de Fourier dans L^1) *Soient $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) = L^1$ et $t \in \mathbb{R}^N$. Alors l'application g définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$ par : $g(x) = e^{-ixt} f(x)$ appartient à $L^1_{\mathbb{C}}$. On définit la transformée* *de Fourier de f, qu'on note $\hat{f}$,par :*

$$\hat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int f(x) e^{-ixt} dx, \forall\, t \in \mathbb{R}^N. \tag{10.2}$$

Proposition 10.1 *Soit F l'application qui à f associe sa transformée de Fourier. F est une application linéaire continue de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})(= \{g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}); g(t) \to 0$ quand $|t| \to +\infty\}$, muni de la norme du sup).*

DÉMONSTRATION :

- Le théorème de continuité sous le signe somme appliqué à la fonction $(x,t) \mapsto e^{-ix.t} f(x)$ entraîne immédiatement que $\hat{f}$ est continue.
- Montrons maintenant que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
  - Cas $N = 1$: montrer que $\hat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-ix.t}(-f(y + \frac{\pi}{t}) dy$, et en déduire que $\hat{f}(t) \le \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f(.) - f(. + \frac{\pi}{t})\|_1$. Conclure par le théorème de continuité en moyenne.
  - Cas $N > 1$; soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ t.q. $|t_n| \to +\infty$. Montrer qu'il existe $k \in \{1, \ldots, N\}$ et une sous-suite $t^n_k(l) \subset \mathbb{R}$ telle que $t_k^{n(l)} \to +\infty$ lorsque $l \to +\infty$ et conclure comme pour le cas $N = 1$.

Proposition 10.2 *Soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) = L^1$, alors $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{f}\hat{g}$.*

10.2.2 Théorème d'inversion

On peut se poser les deux questions suivantes :

(i) la transformée de Fourier d'une fonction f caractérise-t-elle la fonction f (c.à.d. si $\hat{f} = \hat{g}$ p.p. , a-t-on $f = g$ p.p.)?

(ii) peut-on retrouver la fonction à partir de sa transformée de Fourier ?

Les réponses à ces questions sont fournies par le théorème d'inversion de Fourier :

Théorème 10.1 (Inversion de la transformée de Fourier) *Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ telle que $\hat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$ alors $f = \hat{\hat{f}}(-.)$ pp., c.à.d. :*

$$f(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \hat{f}(x) e^{ixt} dx, \forall\, t \in \mathbb{R}^N. \tag{10.3}$$

DÉMONSTRATION :

Soit $H(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{itx} dt, x \in \mathbb{R}. \tag{10.4}$$

1. Montrer que $h_\lambda(x) = (\dfrac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$, et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.

2. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt. \tag{10.5}$$

3. Soit g une fonction bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue en 0; montrer que $g * h_\lambda(0) \to \sqrt{2\pi}g(0)$ quand $\lambda \to 0$. [*Utiliser 1. et le théorème de convergence dominée.*]

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$, montrer que :

$$\|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to 0. \tag{10.6}$$

[*Utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec* $g(y) = \int |f(x+y) - f(x)|dx$.]

5. Déduire de ce qui précède le théorème d'inversion. ■

Une conséquence de ce théorème est l'injectivité de l'application F, qui fournit donc une réponse positive à la question (i). En effet, soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\hat{f} = \hat{g}$; alors par linéarité, $\widehat{f-g} = 0$ et donc $\widehat{f-g} \in L^1_{\mathbb{C}}$. En appliquant le théorème d'inversion, on a donc $f = g$ p.p..
Ce théorème apporte aussi une réponse partielle à la question (ii) : on peut calculer f à partir de $\hat{f}$ dès que $\hat{f} \in L^1$. Il faut remarquer à ce propos que L^1 n'est pas stable par transformation de Fourier (voir exercice 10.1.

10.2.3 Régularité et comportement á l'infini

Proposition 10.3 (Différentiabilité, dimension 1) *1. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et telle que $Df \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{Df}(t) = (it)\hat{f}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

2. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ telle que $(.)f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où $(.)f$ est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $xf(x)$. Alors $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $D\hat{f} = \widehat{(-i.)f}$.

La transformation de Fourier "transforme" donc la dérivation en multiplication par la fonction $(i.)$, et la multiplication par $(-i.)$ en dérivation. Cette propriété est utilisée pour la résolution d'équations différentielles (qui sont ainsi transformées en équations algébriques).
Cette propriété se généralise au cas de la dimension N et pour un ordre k de dérivation quelconque....
On introduit pour ce faire les notations suivantes : soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^t \in \mathbb{N}^N$ un "multi-indice" et f une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. On définit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_N$ et :

$$D^\alpha f = \Big(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} . \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_N}}\Big) f. \tag{10.7}$$

Proposition 10.4 (Différentiabilité, dimension N)

1. Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, $(k \geq 1)$ et telle que $D^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, $\forall \alpha$ tel que $|\alpha| \leq k$. Alors $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \hat{f}(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, avec $(it)^\alpha = (it_1)^{\alpha_1}(it_2)^{\alpha_2} \ldots (it_N)^{\alpha_N}$.

2. Soit f telle que $(.)^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ $\forall \alpha$ tel que $|\alpha| \leq k$. Alors $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et $D^\alpha \hat{f} = \widehat{(-i.)^\alpha f}$.

Ces dernières propriétés montrent que la dérivabilité de f entraîne la décroissance de $\hat{f}$ à l'infini ("plus f est dérivable, plus $\hat{f}$ décroît vite à l'infini"), et réciproquement. Cette remarque incite à définir l'espace des fonctions à décroissance rapide, qu'on note:

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \forall \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{N}^N, \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |(x)^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty\} \tag{10.8}$$

et dont on va montrer l'invariance par transformation de Fourier. On commence par remarquer que $\mathcal{S} \subset L^1$: en effet, si $f \in \mathcal{S}$, alors en prenant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on remarque qu'il existe des constantes positives C_1 et C_2 telles que $|f(x)| \leq C_1$, et pour $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $x^2|f(x)| \leq C_2$; on en déduit que $f \in L^1$.

Remarque 10.1 Soient $f \in \mathcal{S}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, on a :

$$D^\alpha\Big(\widehat{(-i.)^\beta) f}\Big) = (i.)^\alpha (\widehat{-i.)^\beta}) f = (i.)^\alpha D^\beta \hat{f} \tag{10.9}$$

$$\widehat{(-i.)^\alpha} D^\beta f = D^\alpha \widehat{D^\beta} f = D^\alpha[(i.)^\beta \hat{f}] \tag{10.10}$$

Proposition 10.5 *L'application F qui à f associe sa transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, et $f = \hat{\hat{f}}(-.)$, $\forall f \in \mathcal{S}$.*
DÉMONSTRATION :

1. En utilisant (10.9) ci-dessus, montrer que $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.

2. Pour montrer que F est bijective de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, utiliser le théorème d'inversion dans L^1.

10.3 Transformation de Fourier dans L^2

On aimerait ici définir la transformée de Fourier d'une application de $L^2 = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$. Remarquons que l'espace $L^2 = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{R}_N, \lambda_N)$ est un espace de Hilbert pour la norme induite par le produit scalaire défini par:

$$(f, g)_2 = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Il est clair que la définition qu'on a donnée pour les fonctions de L^1 ne s'applique pas pour les fonctions de L^2. Pour définir la transformée de Fourier d'une application de L^2, on utilise la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2. On va d'abord remarquer que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}$ dans L^2 et que c'est une isométrie. On utilisera ensuite la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 pour définir la transformée de Fourier des fonctions de L^2.

Proposition 10.6 *Soient $f, g \in \mathcal{S}$ (donc en particulier $f, g \in L^2$), alors $\hat{f}$ et $\hat{g} \in L^2$, et $(f, g)_2 = (\hat{f}, \hat{g})_2$. En particulier, $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.*
DÉMONSTRATION : Soient $f, g \in \mathcal{S}$, appliquer le théorème d'inversion sur f (par exemple...) et Fubini pour montrer que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. ■

Théorème 10.2 *Il existe une application linéaire continue de L^2 dans L^2 telle que :*

1. *Si $f \in L^1 \cap L^2$, on a $\hat{f} = \overline{F}(f) pp$*

2. *$\forall f, g \in L^2$, on a $(f, g)_2 = (\overline{F}(f), \overline{F}(g))_2$*

3. $\forall f \in L^2$*, on a :* $f = \overline{F}(\overline{F}(f))(-.)$ *(égalité de Plancherel)*

4. F *est une bijection de* L^2 *dans* L^2*.*

DÉMONSTRATION :
Préliminaires : Soient f et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ telles que $f_n \to f$ dans L^2 lorsque $n \to +\infty$; montrer en utilisant la proposition 10.6 que $\hat{f}_n \to \hat{f}$ dans L^2 lorsque $n \to +\infty$. On pose $\overline{F}(f) = L^2 - \lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n$.

1. Soit $f \in L^2$; remarquer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ telle que $f_n \to f$ dans L^2 et L^1 lorsque $n \to +\infty$ (revoir la démonstration de la densité de C_c^∞ dans L^p, cf théorème 8.3); montrer que $\hat{f}_n \to \hat{f}$ uniformément lorsque $n \to +\infty$ et que $\hat{f}_n \to \overline{F}(f)$ dans L^2 lorsque $n \to +\infty$ (donc presque partout pour une sous-suite) Conclure par unicité de la limite que $\overline{F}(f) = \hat{f}$ p.p. .

2. Montrer en utilisant la proposition 10.6 que : $\forall f, g \in L^2$, on a $(f,g)_2 = (\overline{F}(f), \overline{F}(g))_2$

3. Soient $f \in L^2$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ telle que $f_n \to f$ dans L^2; montrer que $\hat{\hat{f}}_n(-.) \to \overline{F}(\overline{F}(f))(-.)$ dans L^2 lorsque $n \to +\infty$ et en déduire que $f = \overline{F}(\overline{F}(f))(-.)$

4. Montrer que si $f, g \in L^2$ et $\overline{F}(f) = \overline{F}(g)$, alors $f = g$ p.p. . Montrer que si $f \in L^2$, il existe $g \in L^2$ t.q. $f = \overline{F}(g)$. En déduire que $\overline{F}$ est bien une bijection de L^2 dans L^2.

On donne ici deux exemples simples d'application de la transformation de Fourier pour la résolution des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles.

10.3.1 Equation différentielle

Soient $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $g \in \mathcal{S}$ donnés. On cherche $f \in \mathcal{S}$ qui vérifie :

$$a_N f^{(N)}(x) + \ldots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{10.11}$$

Par transformation de Fourier, on obtient :

$$a_N \widehat{f^{(N)}}(x) + \ldots + a_1 \hat{f'}(x) + a_0 \hat{f}(x) = \hat{g}(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{10.12}$$

c.à.d. :

$$a_N (it)^N \hat{f}(t) + \ldots + a_1 it\hat{f}(t) + a_0 f(t) = \hat{g}(t), \forall t \in \mathbb{R}. \tag{10.13}$$

En posant $p(t) = a_N(it)^N + \ldots + a_1 it + a_0$ et en supposant que p e s'annule pas, on a alors :

$$\hat{f}(t) = \frac{\hat{g}(t)}{p(t)} \in \mathcal{S}, \tag{10.14}$$

et donc, par le théorème d'inversion,

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{\hat{\hat{g}}}{p}(-t) \in \mathcal{S}, \tag{10.15}$$

On a donc une solution explicite à l'équation différentielle (10.11).

10.3.2 Equation aux dérivées partielles

Soit $N \geq 1$, on cherche $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ t.q.

$$-\Delta u(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.16}$$

- Cherchons $u \in \mathcal{S}$ (et donc $\Delta u \in \mathcal{S}$) t.q. $\Delta u = 0$. On a donc $\widehat{\Delta u} = 0$ partout, c.à.d. $|t|^2 \hat{u}(t) = 0$ et donc $\hat{u}(t) = 0, \forall t \neq 0$. Comme $\hat{u}$ est continue, ceci entraîne que $\hat{u} = 0$, et donc que $u = 0$ est la seule solution de (10.16) dans $\mathcal{S}$.
- On peut effectuer exactement le même raisonnement dans L^2, et donc il existe une unique solution $u = 0$ à (10.16) dans L^2.
- Remarquons enfin que $u \equiv 1$ est solution de (10.16) dans L^∞ mais pas dans L^2.

10.4 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

à suivre...

10.5 Exercices

Exercice 10.1

1. Calculer la transformée de Fourier de $1_{[-a,a]}$, $a \in \mathbb{R}_+$. En déduire que L^1 n'est pas stable par transformation de Fourier.
2. On pose $g_n = 1_{[-n,n]}$. Calculer $f * g_n$, et montrer qu'il existe $h_n \in L^1$ telle que $\hat{h}_n = f * g_n$. Montrer que la suite $f * g_n$ est bornée dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors que la suite h_n n'est pas bornée dans L^1. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas surjective de L^1 dans C_0.

Exercice 10.2 Soit $f \in \mathcal{S}$, on pose $L(f)(x) = f''(x) + xf(x)$.

1. Montrer que $L(f) = 0$ entraîne $f = 0$.
2. Soit $k \in \mathcal{S}$, montrer que l'équation différentielle $h'(t) = k(t)$ a une solution dans $\mathcal{S}$ si et seulement si $\int k(t)dt = 0$.
3. Soit $g \in \mathcal{S}$, étudier l'existence et l'unicité des solutions dans $\mathcal{S}$ de l'équation $L(f) = g$. On pourra remarquer que pour $h \in \mathcal{S}$, on a :

$$i\frac{d}{dt}(he^{-i\frac{t^3}{3}}) - t^2(he^{-i\frac{t^3}{3}}) = ih'(t)e^{-i\frac{t^3}{3}}.$$

Exercice 10.3 On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$.

1. Soient $f, g \in L^1$, montrer que $f\hat{g} \in L^1$, $g\hat{f} \in L^1$ et $\int f\hat{g}d\lambda = \int g\hat{f}d\lambda$.
2. Soit $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $1_B * 1_B(t) = (1 - |t|)^+$.
3. On pose $\theta_n = (1 - \frac{|t|}{n})^+, n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente que:

$$\hat{\theta}_n(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{ny^2}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

[*Se ramener à* θ_1...]

4. Soit $f \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\hat{f}(t) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\hat{f} \in L^1$ (et donc que le théorème d'inversion s'applique)

   (a) On note $\varphi_n = \theta_n \hat{f}$; montrer que $\varphi_n \uparrow \hat{f}$ et $\int \varphi_n d\lambda \uparrow \int \hat{f} d\lambda$ lorsque $n \to +\infty$.

   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ indépendant de n tel que $\int \hat{\theta}_n(y) dy = \alpha, \forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\hat{f} \in L^1$.

Exercice 10.4 On note ici $\hat{f}$ la transformée de Fourier, pour $f \in L^1$ ou L^2.

1. Soient $f, g \in \mathcal{S}$, Montrer que $\widehat{fg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}$.

2. Soient $f, g \in L^2$, Montrer que $\widehat{fg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}$.

Chapter 11

Espaces fonctionnels

11.1 Les espaces de Sobolev

......

11.2 L'espace BV

....

11.3 Théorèmes de compacité

Théorème 11.1 (Helly et Rellich ...) ....

11.4 Capacité

Définition 11.1 (Capacité) *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty]$*

1. *Soit $K \subset \Omega$ compact. On appelle $W_0^{1,p}$-capacité de K la quantité:*
$$\mathrm{cap}_p(K) = \inf\{\|u\|_{W_0^{1,p}}, u \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})(\Omega), u(x) \geq 1 \forall x \in K\}. \tag{11.1}$$

2. *Soit $O \subset \Omega$ ouvert. On appelle $W_0^{1,p}$-capacité de O la quantité:*
$$\mathrm{cap}_p(O) = \sup\{\mathrm{cap}_p(K), K \subset O, K \mathrm{compact}\}. \tag{11.2}$$

3. *Soit $A \subset \Omega$ borélien. On appelle $W_0^{1,p}$-capacité de A la quantité:*
$$\mathrm{cap}_p(A) = \inf\{\mathrm{cap}_p(O), A \subset O, O \mathrm{ouvert}\}. \tag{11.3}$$

Proposition 11.1 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, +\infty]$, et $O \subset \Omega$ un ouvert, alors*
$$\mathrm{cap}_p(O) = \inf\{\|u\|_{W_0^{1,p}}, u \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}), u(x) \geq 1 \forall x \in O\}. \tag{11.4}$$

et

$$\text{cap}_p(O) = \inf\{\|u\|_{W_0^{1,p}}, u \in C_c(\Omega, \mathbb{R}) \cap H^1(\Omega), u(x) \geq 1 \forall x \in O\}. \tag{11.5}$$

Proposition 11.2 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, +\infty]$, alors il existe $C_p \geq 0$ tel que pour tout borélien $A \subset \Omega$,*

$$\lambda_N(A) \leq C_p \text{cap}_p(A) = \inf\{\|u\|_{W_0^{1,p}}, u \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}), u(x) \geq 1 \forall x \in O\}. \tag{11.6}$$

Exercice 11.1 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, +\infty[$ et $\mu \in M(\Omega)$ (mesure de Radon, cf définition 5.1). Montrer que $\mu \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ ssi*
($\text{cap}_p(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$, pour tout borélien A de Ω.)