INTEGRALE sur un INTERVALLE

—

C. Susset

—

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide des principaux résultats à connaître sur l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un intervalle. Si f est une fonction numérique continue sur un segment $[a,b]$ et F est une primitive de f sur $[a,b]$ on notera $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. A partir de l'intégrale des fonctions sur un segment il s'agit de définir et d'étudier les propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

1 Fonctions continues par morceaux

1.1 Subdivisions

Définition 1 *: On appelle subdivision d'un segment $[a,b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.*

1.2 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 2 *Une application $f : [a,b] -> \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ de $[a,b]$ telle que $\forall k \in \{0, \cdots, n\}$, f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ et se prolonge par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.*

On notera f_k la fonction continue définie sur $[x_k, x_{k+1}]$ par :
$f_k(x) = f(x)$ *si* $x \in]x_k, x_{k+1}[$, $f_k(x_k) = \lim\limits_{x->x_k^+} f(x)$, $f_k(x_{k+1}) = \lim\limits_{x->x_{k+1}^-} f(x)$

Propriété 1

1. *Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée*
2. *Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $\int_a^b f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)dt$*

1.3 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 3 *Soit I un intervalle, une application $f : I -> \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I si f est continue par morceaux sur tout segment de I.*

Soit $\mathcal{C}_m(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$

Proposition 1 $(\mathcal{C}_m(I), +, \times, .)$ *est une* $\mathbb{R}$ *algèbre*

2 Intégrale d'une fonction sur un intervalle

2.1 Intégrale des fonctions positives

Définition 4 *Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}_m(I)$, on suppose $f \geq 0$. On dira que f est intégrable sur I si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall [a,b] \subset I$, $0 \leq \int_a^b f(t)dt \leq M$.*
On appellera intégrale de f sur I et on notera $\int_I f$ ou $\int_I f(t)dt$ le réel $\int_I f(t)dt = \sup\limits_{[a,b] \subset I} \int_a^b f(t)dt$

2.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives

2.2.1 Intégrales sur $I = [\alpha, \beta[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$

(on adaptera les propriétés pour un intervalle $I =]\alpha, \beta]$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\beta \in \mathbb{R}$)
Soit $f \in \mathcal{C}_m(I)$, $f \geq 0$

1. *f est intégrable sur I si et seulement si la fonction $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ est majorée sur $[\alpha,\beta[$, on a alors $\int_I f(t)dt = \lim_{x->\beta} \int_\alpha^x f(t)dt$*
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $\forall n \in N,\ x_n \in [\alpha,\beta[$ et $\lim_{n->+\infty} x_n = \beta$ on a :*
   f est intégrable sur I si et seulement si $\left(\int_\alpha^{x_n} f(t)dt\right)_{n\geq 0}$ est majorée on a alors $\int_I f(t)dt = \lim_{n->+\infty} \int_\alpha^{x_n} f(t)dt$
3. *Si $0 \leq f \leq g$ où f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur I et g est intégrable sur I Alors f est intégrable sur I et $0 \leq \int_I f(t)dt \leq .\int_I g(t)dt$.*
4. *$\forall c \in I,\ f$ est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur $[c,\beta[$* et *alors $\int_I f(t)dt = \int_{[\alpha,c]} f(t)dt + \int_{[c,\beta[} f(t)dt$*
5. *$\forall [a,b] \subset I,\ f$ est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$*

2.2.2 Intégrales sur $I =]\alpha,\beta[$ avec $(\alpha,\beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Soit *f une application continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}^+$.*

1. *Soit $c \in]\alpha,\beta[$, f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur $]\alpha,c]$ et sur $[c,\beta[$, on a alors $\int_I f(t)dt = \int_{]\alpha,c]} f(t)dt + \int_{[c,\beta[} f(t)dt$*
2. Soit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ (x_n,y_n) \in]\alpha,\beta[^2,\ \lim_{n->+\infty} x_n = \alpha,\ \lim_{n->+\infty} y_n = \beta$
   f est intégrable sur I si et seulement si $\left(\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt\right)_{n\geq 0}$ est majorée et $\int_I f(t)dt = \lim_{n->+\infty} \int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$
3. *Si $0 \leq f \leq g$ où f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur I et g est intégrable sur I Alors* f est intégrable sur *I et $0 \leq \int_I f(t)dt \leq .\int_I g(t)dt$.*

2.2.3 Exemples à connaître :

1. $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$, $I =]0,1]$, *f est intégrable sur I si et seulement si $\alpha < 1$.*
2. $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$, $I = [1,+\infty[$, *f est intégrable sur I si et seulement si $\alpha > 1$*
3. $f(t) = e^{-at}$, $I = [0,+\infty[$, *f est intégrable sur I si et seulement si $a > 0$*

2.3 Intégrale de fonctions continues par morceaux sur un intervalle.

1. Soit $f \in \mathcal{C}_m(I)$, où I est un intervalle quelconque.

   Définition 5 *f est intégrable sur I si et seulement si $|f\ |$ est intégrable sur I.*

   Soit $\mathcal{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et intégrable sur I.
   Posons : $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0)$, on a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$

   Proposition 2 *$f \in \mathcal{L}^1(I)$ si et seulement si $f^+ \in \mathcal{L}^1(I)$ et $f^- \in \mathcal{L}^1(I)$*

   Définition 6 *Si $f \in \mathcal{L}^1(I)$ on appelle intégrale de f sur I le réel noté $\int_I f$ ou $\int_I f(t)dt$ défini par : $\int_I f(t)dt = \int_I f^+(t)dt - \int_I f^-(t)dt$*

2.4 Propriétés de $\mathcal{L}^1(\mathbf{I})$

1. *Si $I = [a,b]$, et $f \in \mathcal{C}_m(\mathcal{I})$ alors $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$*
2. *$(\mathcal{L}^1(\mathbf{I})\ ,+,.)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $\begin{array}{l} \mathcal{L}^1(I) -> \mathbb{R} \\ f \ -> \int_I f \end{array}$ est une forme linéaire.*
3. *$I = [\alpha,\beta[$, avec $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$* (on adaptera les propriétés pour un intervalle $I =]\alpha,\beta]$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\beta \in \mathbb{R}$)

   (a) *Soit $f \in \mathcal{C}_m(\mathcal{I}),\ g \in \mathcal{L}^1(I),\ g \geq 0$*
   Si au voisinage de β on a $|f| \leq g$ ou $f = o(g)$ ou $f = O(g)$ ou $|f| \sim g$ alors $f \in \mathcal{L}^1(I)$

   (b) *Si $f \in \mathcal{L}^1(I)$ Alors $\int_I f(t)dt = \lim_{x->\beta} \int_\alpha^x f(t)dt$*

(c) *Si* $f \in \mathcal{L}^1(I)$ *et* $(x_n)_n$ *est une suite de* I *avec* $\lim\limits_{n->+\infty} x_n = \beta$ *Alors* $\int_I f(t)dt = \lim\limits_{n->+\infty} \int_\alpha^{x_n} f(t)dt$

(d) *Si* $c \in I$ *Alors* $f \in \mathcal{L}^1(I)$ *si et seulement si* $f \in \mathcal{L}^1([c, \beta[)$ *et alors* $\int_I f(t)dt = \int_{[\alpha,c]} f(t)dt + \int_{[c,\beta[} f(t)dt$

4. $I =]\alpha, \beta[$, *avec* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, *soit* $f \in \mathcal{C}_m(\mathcal{I})$ *et* $c \in I$
   (a) $f \in \mathcal{L}^1(I)$ *si et seulement si* $f \in \mathcal{L}^1(]\alpha, c])$ *et* $f \in \mathcal{L}^1([c, \beta[)$, *on a alors* $\int_I f(t)dt = \int_{]\alpha,c]} f(t)dt + \int_{[c,\beta[} f(t)dt$
   (b) *Si* $|f| \leq g$ *sur* I *et* $g \in \mathcal{L}^1(I)$ *Alors* $f \in \mathcal{L}^1(I)$
   (c) *Si* $f \in \mathcal{L}^1(I)$, $(x_n)_n$ *et* $(y_n)_n$ *sont deux suites de* I *telles que* $\lim\limits_{n->+\infty} x_n = \alpha$ *et* $\lim\limits_{n->+\infty} y_n = \beta$ *Alors* $\int_I f(t)dt = \lim\limits_{n->+\infty} \int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$

5. *Si* $(f, g) \in \mathcal{L}^1(I)^2$, *où* I *est un intervalle quelconque d'extrémités* a *et* b. *On notera* $\overset{\circ}{I} =]a, b[$
   (a) *Si* $f \leq g$ *sur* I *Alors* $\int_I f \leq \int_I g$
   (b) $|\int_I f| \leq \int_I |f|$
   (c) *Si* J *est un intervalle contenu dans* I *Alors* $f \in \mathcal{L}^1(J)$
   (d) *Si* J *est un intervalle tel que* $\overset{\circ}{I} \subset J \subset I$ *Alors* $f \in \mathcal{L}^1(J)$ *et* $\int_J f = \int_I f$
   (e) *Si* $h \in \mathcal{C}_m(\mathcal{I})$ *avec* $h = f$ *sur* I *sauf en un nombre fini de points Alors* $h \in \mathcal{L}^1(J)$ *et* $\int_I h = \int_I f$
   (f) $\min(f, g) \in \mathcal{L}^1(I)$, $\max(f, g) \in \mathcal{L}^1(I)$

3 Intégrale de fonctions complexes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{C}$, $f = f_1 + if_2$ avec $f_1 = Re(f)$ et $f_2 = Im(f)$

Définition 7 *f est intégrable sur I si et seulement si $|f| \in \mathcal{L}^1(I)$ et on appelle intégrale de f sur I le complexe* $\int_I f = \int_I f_1 + i \int_I f_2$

Soit $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions complexes, continues par morceaux et intégrables sur I. $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. $\forall f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ on a $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$

4 Théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée

4.1 Théorème de convergence monotone

On appelle aussi ce théorème le *théorème de Beppo-Lévi*

Théorème 1
Si
· $(f_n)_n$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{L}^1(I)$ *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$
· $(f_n)_n$ *est une suite croissante* $(\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(t) \leq f_{n+1}(t))$
· $(f_n)_n$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* f *continue par morceaux sur* I.
Alors
· *Ou bien* $(\int_I f_n)_n$ *est majorée, et alors* $f \in \mathcal{L}^1(I)$ *et* $\int_I f = \lim\limits_{n->+\infty} \int_I f_n$
· *Ou bien* $(\int_I f_n)_n$ *n'est pas majorée, et alors* $f \notin \mathcal{L}^1(I)$

On a un théorème équivalent pour les suites décroissantes de fonctions.

Théorème 2 *(cas des séries)*
Si
· $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions de* $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$
· $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *converge simplement sur* I *et a pour somme* f, *avec* f *une fonction continue par morceaux sur* I
Alors
· $f \in \mathcal{L}^1(I)$ *si et seulement si* $\sum\limits_{n\geq 0} \int_I f_n$ *converge.*
· *Si* $f \in \mathcal{L}^1(I)$ *alors* $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

4.2 Théorème de convergence dominée

On appelle aussi ce théorème le théorème de lebesgue

Théorème 3
Si
$\cdot (f_n)_n$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$
$\cdot$ $(f_n)_n$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* f *continue par morceaux sur* I
$\cdot$ $\exists g \in \mathcal{L}^1(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}\ |f_n| \leq g$ *(hypothèse de domination)*
Alors
$\cdot$ $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$
$\cdot$ $\lim\limits_{n->+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim\limits_{n->+\infty} f_n$

Remarque *:Avec les mêmes hypothèses on a, plus précisément :* $\lim\limits_{n->+\infty} \int_I |f - f_n| = 0$
On dit que la suite $(f_n)_n$ *converge en moyenne vers la fonction* f

Théorème 4 *(cas des séries)*
Si
$\cdot$ $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions de* $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$
$\cdot$ $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *converge simplement sur* I *et a pour somme* f *une fonction continue par morceaux sur* I
$\cdot$ $\sum\limits_{n\geq 0} \displaystyle\int_I |f_n|$ *converge.*
Alors
$f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ *et* $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

5 Intégrales dépendant d'un paramètre

5.1 Cas d'un segment

Soit $I = [a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$, A *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* f : $\begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \to & f(x,t) \end{array}$ *une application. On s'intéresse à la fonction* F *telle que :* $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathtt{dt}$ *définie pour les valeurs de* x *telles que* $t \to f(x,t)$ *est intégrable sur* I.

5.1.1 Continuité

Théorème 5
Si
f *est continue sur* $A \times I$ *(par rapport au couple* (x,t)*).*
Alors
F *est définie et continue sur* A

5.1.2 Dérivation

(formule de Leibniz)

Théorème 6
Si

- f *est continue sur* $A \times I$ *(par rapport au couple* (x,t)*).*
- $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ *est définie et continue sur* $A \times I$ *(par rapport au couple* (x,t)*).*

Alors
F *est définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A *et* $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)\mathtt{dt}$

5.1.3 Intégration

(formule de Fubini)

Théorème 7
Si
f est continue sur $A \times I$ (par rapport au couple (x,t)).
Alors
Pour tout segment $[c,d] \subset A$ $\int_c^d [\int_a^b f(x,t)\mathtt{dt}]\mathtt{dx} = \int_a^b [\int_c^d f(x,t)\mathtt{dx}]\mathtt{dt}$

5.2 Cas d'un intervalle quelconque

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, I d'extrémités a et b ($(a,b) \in \bar{\mathbb{R}}^2$, on notera $\bar{I} = [a,b]$ dans $\bar{\mathbb{R}}$), A un intervalle de $\mathbb{R}$ et f : $\begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \to & f(x,t) \end{array}$ *une application telle que pour tout x appartenant à A, $\;t \to f(x,t)$ est continue par morceaux sur I. On s'intéresse à la fonction F telle que : $F(x) = \int_a^b f(x,t)\mathtt{dt}$, définie pour les valeurs de x telles que $t \to f(x,t)$ est intégrable sur I.*

5.2.1 Calcul de limite

soit $\alpha \in \bar{A}$ (dans $\bar{\mathbb{R}}$, éventuellement $\alpha = +\infty$ ou $-\infty$)

Théorème 8
Si
- $\forall t \in \mathbf{I} \quad \lim\limits_{x \to \alpha} f(x,t) = l(t)$ *avec l continue par morceaux sur I*
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(I) \quad \forall (x,t) \in A \times I, |f(x,t)| \leq g(t)$ *(hypothèse de domination)*

Alors
- $l \in \mathcal{L}^1(I)$
- $\lim\limits_{x \to a} \int_I f(x,t)dt = \int_I l(t)dt$

5.2.2 Théorème de continuité.

Théorème 9
Si
- $\forall t \in I,\ f :$ $\begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \to & f(x,t) \end{array}$ *est continue sur A*
- *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{I}, \mathbb{R}^+)$ telle que $\forall (x,t) \in A \times I \qquad |f(x,t)| \leq g(t)$ (hypothèse de domination)*

Alors
La fonction F est définie et continue sur A.

5.2.3 Théorème de dérivation.

(formule de Leibniz)

Théorème 10
Si
- $\forall t \in I,\ f :$ $\begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \to & f(x,t) \end{array}$ *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A*
- *Il existe une fonction $h \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que $\forall (x,t) \in A \times I$ $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq h(t)$ (hypothèse de domination)*

Alors
- *F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A*
- $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$

Dans la pratique on a aussi le théorème :

Théorème 11
Si

- $\forall t \in I,\ f: \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \to & f(x,t) \end{array}$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* A ($p \in \mathbb{N}$ *ou* $p = +\infty$)
- $\forall k,\ 0 \leq k \leq p$ *il existe une fonction* $h_k \in \mathcal{L}^1(I)$ *telle que* $\forall (x,t) \in A \times I$ $\quad \left|\dfrac{\delta^k f}{\delta x^k}(x,t)\right| \leq h_k(t)$

Alors

- F *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* A
- $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq p\ \ F^k(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$