Feuille d'exercices

—

Intégrale sur un intervalle

—

Exercice 1 *Déterminer les primitives suivantes en précisant les intervalles de définition :*
1. $\int (x^2-x)sin(\frac{x}{2})\mathtt{dx}$ 2. $\int \frac{\mathtt{dx}}{e^x+2e^{-x}}$ 3. $\int \frac{\mathtt{dx}}{x^3+1}$ 4. $\int \frac{\mathtt{dx}}{x-1-i}$ 5. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathtt{dx}$

Exercice 2 *Calculer après avoir montré l'existence :*
1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathtt{dx}$ 2. $\int_{-1}^0 \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}\mathtt{dt}$ 3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathtt{dt}$, $b>a>0$, 4. $\int_0^{+\infty} \frac{e^-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathtt{dt}$

Comparaison d'une série avec une intégrale :

Exercice 3 *Soit* $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une application continue par morceaux et décroissante. On pose* $w_n = \int_{n-1}^n (f(t)-f(n))\mathtt{dt} = \left(\int_{n-1}^n f(t)\mathtt{dt}\right) - f(n)$.

1. *Montrer que* $\sum_{n\geq 0} w_n$ *converge*
2. *Montrer que* $f\in\mathcal{L}^1([0,+\infty[)$ *si et seulement si* $\sum_{n\geq 0} f(n)$ *converge.*
3. *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *montrer que* $w_n = -\int_{n-1}^n (t-n+1)f'(t)\mathtt{dt}$

Exercice 4 *Pour* $p\in\mathbb{R}$, $p>1$ *on pose* $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k-n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ *et* $S=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}$.

1. *A l'aide d'une comparaison avec une intégrale déterminer un équivalent de* R_n *en* $+\infty$ *et en déduire les valeurs de* p *pour les quelles la série* $\sum_{n\geq 1} R_n$ *converge.*
2. *Pour* $p=2$, *Donner une majoration de l'erreur lorsque l'on prend* S_n *comme valeur approchée de* S *puis lorsque l'on prend* $S_n+\frac{1}{n}$ *comme valeur approchée de* S.

Théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée

Exercice 5 *Montrer que* $\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\mathtt{dt} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

Exercice 6 *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathtt{dt} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathtt{dt}$

Exercice 7 *Déterminer les limites suivantes :*
1. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n^2+t^2}\mathtt{dt}$
2. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-n\sin^2 t}}{1+t^2}\mathtt{dt}$
3. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 t}f(t)\mathtt{dt}$ *si* $f\in\mathcal{L}^1([0,+\infty[)$

Exercice 8 *On suppose* f *définie et continue par morceaux sur* $[0,+\infty[$ *avec* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$, $L\in\mathbb{R}$. *Etudier* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(t)}{n^2+t^2}\mathtt{dt}$ *puis* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nt\sin(\frac{1}{t})}{n^2+t^2}\mathtt{dt}$

Exercice 9 *On suppose* g *continue sur* $[0,1]$, *étudier* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{ng(t)t^{n-1}}{1+t^n}\mathtt{dt}$

Exercice 10 *On suppose* $f\in\mathcal{L}^1([0,+\infty])$, *étudier* $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathtt{dt}$