Feuille d'exercices
—
Intégrale sur un segment
—

Exercice 1 *Déterminer les fonctions continues* f *de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que* $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup\limits_{[a,b]}|f|$.

Exercice 2 *Soient* $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ *et* $I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.

1. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que* $I_n \to 0$.
2. *Montrer que ceci est encore vrai si* f *est en escalier.*
3. *En déduire que le résultat subsiste pour* f *continue par morceaux.*

Exercice 3 *Soient* $0 < a \leq b$. *Montrer que* $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 4 *Soit* $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ *telle que* $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. *Montrer qu'il existe* $a \in]0,1[$ *telle que* $f(a) = a$.

Exercice 5 *Calculer* $\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{dx}$.

Exercice 6 *Soit* $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. *Etablir une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n+1}.
2. *Calculer* I_n.
3. *En déduire* $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 7 *Soit* $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$.

1. *Montrer que* $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(a-x)(b-x)dx$.
2. *En déduire un encadrement de* $\int_a^b f(t)dt$ *si* $\forall x \in [a,b]$ $m \leq f''(x) \leq M$.

Exercice 8 *Intégrales de Wallis : Soit* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. *Etablir une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n+2}.
2. *En déduire* I_{2p} *et* I_{2p+1}.
3. *Montrer que* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et strictement positive.*
4. *En déduire que* $I_n \sim I_{n+1}$.
5. *Calculer* nI_nI_{n-1}.
6. *Donner alors un équivalent simple de* I_n.

Exercice 9 *Soit* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. *En majorant la fonction intégrée, montrer que* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. *Calculer* $I_n + I_{n+1}$.
3. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k})$.

Exercice 10 *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2})$.

Exercice 11 *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{(2n)!}{n!n^n})^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 12 *Soient* $I = \int_0^\pi x\cos^2 x dx$ *et* $J = \int_0^\pi x\sin^2 x dx$.

1. *Calculer* $I - J$ *et* $I + J$.
2. *En déduire* I *et* J.

Exercice 13 *Soit* $f \in C^0(\mathbb{R})$. *On définit* $g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \end{cases}$.

1. *Montrer que* g *se prolonge par continuité en* 0.
2. *Montrer que si* f *est périodique,* g *admet une limite en* $+\infty$.

Exercice 14 *Soit* $a_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

1. *Calculer* $a_0, \ldots, a_4$.
2. *Etudier la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.