REDUCTION D'ENDOMORPHISMES

—

C. Susset

—

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Sous espaces stables

1.1 Définitions :

1.1.1 Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme

Définition 1 *Soit F un sous espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E.*
On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$

Exemple 1 *Pour $u \in L(E)$, $\operatorname{Im} u, \ker u$, une droite vectorielle admettant pour vecteur directeur un vecteur propre, un sous-espace propre sont des sous-espaces stables par u.*

Propriété 1 *Si $F = vect < u_1, \ldots, u_p >$ (sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 \ldots, u_p$), F est stable par $f \in L(E)$ si et seulement si $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$ $f(u_k) \in F$*

1.1.2 Endomorphisme induit

Définition 2 *Soit $f \in L(E)$ et F un sous espace stable par f. la restriction de f à F est un endomorphisme de F qui s'appelle l'endomorphisme induit par f à F. $f_{/F} \in L(F)$.*

Proposition 1 *Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont stables par v.*
conséquence : Si $u \circ v = v \circ u$ alors les sous-espace propres de u sont stables par v.

1.2 Dimension finie

On suppose E de dimension finie n

1.2.1 Matrice dans une base adaptée à un sous-espace vectoriel F.

Soit F un sous espace vectoriel de E et G un supplémentaire. $E = F \oplus G$. On appelle base adaptée à cette décomposition une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \cdots, e_p)$ soit une base de F et $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ une base de G.
On notera $B = B_1 \cup B_2$, avec $B = (e_1, \cdots, e_n)$, $B_1 = (e_1, \cdots, e_p)$, $B_2 = (e_{p+1}, \cdots, e_n)$

Proposition 2 *Soit $f \in L(E)$, avec les notations précédentes : F est stable par f si et seulement si la matrice de f dans la base B est de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec $A \in M_p(\mathbb{K})$, $C \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $D \in M_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$.*

Proposition 3 $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$

Conséquence :
Si P_f désigne le polynôme caractéristique de f $(P_f = \det(f - XI_d))$ on a : $P_f(X) = P_{f_F}(X)P_{f_G}(X)$ avec $P_{f_F}(X) = \det(A - XI_p)$ et $P_{f_G}(X) = \det(D - XI_p)$

Proposition 4
Si $f \in L(E)$ et F est un sous espace vectoriel stable par f
alors le polynôme caractéristique de $f_{/F}$ divise le polynôme caractéristique de f

1.2.2 Matrice dans une base adaptée à une décomposition $E = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$

Proposition 5 *Soit $f \in L(E)$, $\forall i \in \{1, \cdots, r\}, E_i$ est stable par f si et seulement si la matrice de f dans une base B adaptée, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$,B_i base de E_i, est de la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & A_p \end{pmatrix}$ avec $A_i \in M_{p_i}(\mathbb{K})$, $p_i = \dim E_i$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $n = \sum_{k=1}^{r} p_i$.*

Proposition 6 *avec les notations précédentes :*

1. $\det(f) = \prod_{k=1}^{r} \det(f_i)$ *avec* $f_i = f_{/E_i}$
2. *Si P_f désigne le polynôme caractéristique de f alors* $P_f = \prod_{k=1}^{r} P_{f_i}$

1.2.3 Drapeaux :

Définition 3 *On appelle drapeau de E une suite $(E_i)_{0 \leq i < n}$ strictement croissante (au sens de l'inclusion) de $n+1$ sous espaces vectoriels de E telle que $E_0 = \{0\}$ et $E_n = E$.*

On a pour un drapeau $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$ $\dim(E_i) = i$.
On appelle base adaptée à un drapeau $D = (E_i)_{0 \leq i < n}$, une base $B = (e_1, \cdots, e_n)$ telle que $(e_1, \cdots, e_i)$ soit une base de E_i pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.
Soit f un endomorphisme de E, on dit que f stabilise le drapeau $D = (E_i)_{0 \leq i < n}$ si $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, E_i est stable par f.

Proposition 7 *Soit $f \in L(E)$ et D un drapeau.*
f stabilise le drapeau D si et seulement si la matrice de f dans une base adaptée au drapeau est triangulaire supérieure.

2 Polynômes d'un endomorphisme

2.1 Polynômes

2.1.1 Définition d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$:

On appelle idéal de $\mathbb{K}[X]$, tout sous groupe I de $(\mathbb{K}[X], +)$ tel que $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times I$, $PQ \in I$

2.1.2 Structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Proposition 8 *Soit $I \subset \mathbb{K}[X]$, I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $\exists P_0 \in \mathbb{K}[X]$, $I = P_0\mathbb{K}[X]$*

2.1.3 Polynômes premiers entre-eux ; théorème de Bezout ; théorème de Gauss :

Définition 4 *2 polynômes P et Q sont premiers entre eux si et seulement si leurs seuls diviseurs communs sont les éléments de $\mathbb{K}$.*

Proposition 9
Si *P et Q sont scindés sur $\mathbb{K}$ (ce qui qui est toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), avec $P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - a_i)^{\alpha_i}$ $\alpha_i \geq 1$ et $Q = \prod_{k=1}^{q} (X - b_i)^{\beta_i}$ $\beta_i \geq 1$.*
Alors *P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $\{a_1, \cdots, a_p\} \cap \{b_1, \cdots, b_p\} = \emptyset$*

Théorème de Bezout : Deux polynômes P et Q sont premiers entre eux *si et seulement si* Il existe deux polynômes U et V tels que $U.P + V.Q = 1$.

Théorème de Gauss :
Si *A divise $B.C$ avec A, B, C trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et A et B sont premiers entre eux*
alors *A divise B.*

2.2 Polynômes d'endomorphismes

1. Pour $u \in L(E)$, l'application $\varphi : P \mapsto P(u)$ est un homomorphisme d'algèbre de $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ dans $(L(E), +, \circ, .)$
   Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par u
2. **Le noyau de φ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$,**
   $\ker\varphi = \{0\}$ ou $P_m\mathbb{K}[X]$ avec P_m unitaire de degré m, P_m est unique et est appelé le polynôme minimal de u et *Si* E est de dimension finie n, on a $m \leq n$.
3. **Théorème de décomposition des noyaux :**
   Théorème : *Si* P et Q sont premiers entre eux et $u \in L(E)$ *alors* $\ker P.Q(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$
   conséquence : les sous espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont en somme directe.
4. **Polynôme caractéristique :**
   Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.
   Définition :
   on appelle polynôme caratéristique d'un endomorphisme f de $L(E)$ le déterminant $=\det(f - XI_d)$
   $P_f(X)$ est un polynôme de degré n
   Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, E_i stable par $f \in L(E)$, soit $f_i = f_{/E_i}$ Alors $P_f(X) = \prod_{i=1}^{p} P_{f_i}(X)$
   Thérorème de Cayley-Hamilton
   Théorème : *Si* $f \in L(E)$ *alors* $P_f(f) = 0$, f annule son polynôme caractéristique, $P_f \in \ker\varphi$.
   Conséquence : le polynôme minimal de f divise son polynôme caractéristique : P_m/P_f
   Si $P_c(f)(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ **alors** $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(\lambda_i Id_E - f)^{\alpha_i}$
   Les sous espaces vectoriels $\ker(\lambda_i Id_E - f)^{\alpha_i}$ s'appellent les sous espaces caractéristiques de f, ils sont stables par f et $\dim\ker(\lambda_i Id_E - f)^{\alpha_i}. = \alpha_i$

3 Réduction d'endomorphismes

3.1 Valeurs propres-vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 5 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in L(E)$. On appelle valeur propre de f tout scalaire λ tel qu'il existe un vecteur non-nul x de E tel que $f(x) = \lambda.x$.*

Définition 6 Si *λ est une valeur propre de f on appelle sous espace propre de f l'espace* $\ker(f - \lambda.Id)$

Proposition 10 *Les sous espaces propres de f sont en somme directe*

3.2 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

3.2.1 Valeurs propres vecteurs propres

Proposition 11 *Soit $f \in L(E)$ de polynôme caractéristique P_f et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
λ est une valeur propre de f si et seulement si λ est racine de P_f.

Définition 7 *Si $P_f(X) = (X - \lambda)^{\alpha} Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$, α est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.*

Proposition 12 *Si $f \in L(E)$ et λ est une valeur propre d'ordre de multiplicité α alors la dimension du sous-espace propre correspondant est inférieure ou égale à α.*

En dimension finie l'ensemble des valeurs propres de f est appelé spectre de u noté $Sp(u)$

- $u \in L(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$, *si* λ est une valeur propre de u *alors* $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$

- *Si* $P(u) = 0$ *alors* toute valeur propre de u est un zéro de P (la réciproque est fausse)

-en dimension finie : soit $a \in GL(E)$, l'application $u \mapsto aua^{-1}$ est un automorphisme de $L(E)$. u et aua^{-1} ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres. *Si* E_λ est le sous espace propre associé à la valeur propre λ de u *alors* $a(E_\lambda)$ est le sous espace propre de aua^{-1} associé à la valeur propre λ.

3.2.2 Endomorphismes diagonalisables

Soit E de dimension finie n

Définition 8
$f \in L(E)$ est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous espaces propres de f.

Proposition 13

1. *$f \in L(E)$, f est diagonalisable si et seulement si E admet une base de vecteurs propres de f.*
2. *f est diagonalisable si et seulement si E admet une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.*
3. *Soit $E_1, \cdots E_p$ les sous espaces propres de f.*
   f est diagonalisable si et seulement si $\dim E = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$.

3.3 Valeurs propres-vecteurs propres d'une matrice carrée

Les éléments propres de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M (c'est à dire l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Les valeurs propres, les sous-espaces propres, les vecteurs propres et le spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut-être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; le spectre de M dans $\mathbb{R}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{C}$.

3.4 Diagonalisation

Proposition 14 *Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme diagonalisable, $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ avec $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id)$. soit p_{λ_i} le projecteur sur E_{λ_i} parallèlement à $\underset{k \neq i}{\oplus} E_{\lambda_k}$. On a $f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i}$*

-si E est somme directe de sous-espaces vectoriels stables E_j sur lesquels f induit une homothétie, alors f est diagonalisable.
-Pour qu'un endomorphisme f de E soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de u soit égale à la dimension de E.
-Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de u soit scindé dans $\mathbb{K}$ et que chaque sous-espace propre ait pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Proposition 15 *Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et n'a que des racines simples est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.*

Théorème 1 *Pour qu'un endomorphisme f de E soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples .*

Proposition 16 *Si $f \in L(E)$, f est diagonalisable et F est un sous espace vectoriel stable par f*
Alors F admet un supplémentaire stable par f

Exercice 1 *On suppose que $f \in L(E)$, f est diagonalisable et F est un sous espace vectoriel stable par f montrer que $f_{/F}$ est diagonalisable, les sous espaces propres de $f_{/F}$ sont les intersections des sous-espaces propres de f et de F (lorsque cette intersection n'est pas réduite à$\{0\}$)*

Remarque 1 *si $P(f) = 0$ où P n'a que des racines simples alors f est diagonalisable et les valeurs propres de f sont contenues dans les racines de P (mais ce ne sont pas nécessairement toutes les racines de P)*

Exemple 2 *les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.*
En effet si p est un projecteur (resp. s est une symétrie) alors p (resp. s) annule le polynôme $X(X-1)$ (resp. $(X-1)(X+1)$)qui n'a que des racines simples de sorte que p (resp.s) est diagonalisable.

Exercice 2 *soit p et q sont deux projecteurs de E, $f \in L(E)$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ $a \neq b$, on suppose que* $\mathtt{Id} = \mathtt{p} + \mathtt{q}$, $\mathtt{f} = \mathtt{ap} + \mathtt{bq}$, $\mathtt{f}^2 = \mathtt{a}^2\mathtt{p} + \mathtt{b}^2\mathtt{q}$.

1. *Calculer* $(f - a\mathtt{Id}) \circ (\mathtt{f} - \mathtt{bId})$
2. *En déduire que f est diagonalisable et déterminer en fonction de p et q les sous espaces propres de f.*

3.5 Trigonalisation

Définition 9 *Un endomorphisme $f \in L(E)$ est trigonalisable si et seulement si E admet une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire.*

Remarque 2 *Si la matrice de f est triangulaire inférieure (resp.supérieure) dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$ elle est alors triangulaire supérieure (resp. inférieure) dans la base $(e_n, \cdots, e_1)$*

Théorème 2 *Soit $f \in L(E)$, E $\mathbb{K}-$espace vectoriel, f est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.*

3.6 Matrices

Définition 10 *Une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire).*
C'est à dire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D (resp. triangulaire T) telle que $D = P^{-1}MP$ (resp. $T = P^{-1}MP$)

Proposition 17 *Une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si l'endormorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M est diagonalisable (resp. trigonalisable).*