MATRICES PAR BLOCS

—

C. Susset

—

Définition

Soit $Mij \in \mathcal{M}_{p_i q_j}(\mathbb{K})$ $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$, $\sum_{i=1}^{p} p_i = n$, $\sum_{j=1}^{q} q_j = m$
La matrice $M \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$, $M = (M_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}}$
est une matrice par blocs.

Opérations

Dans le cas général, dans la mesure où les opérations sur les matrices sont compatibles les opérations sur les matrices par blocs s'effectuent comme sur les matrices ordinaires le terme général étant une matrice.

dans le cas où $p = q = 2$ et $n = m$ on a :

addition : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$

produit : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$

Déterminant

$$\det \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & & M_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{pp} \end{pmatrix} = \det M_{11}.\det M_{22} \cdots \det M_{pp}$$

Polynôme caractéristique

Pour $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & & M_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{pp} \end{pmatrix}$ en désignant par $P_M(X)$ le polynôme caractéristique de M on a :

$P_M(X) = P_{M_{11}}(X).P_{M_{22}}(X) \cdots P_{M_{pp}}(X)$

Sous-espaces stables

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est un sous-espace vectoriel stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$ c'est à dire : $\forall x \in F,\ f(x) \in F$

Soit F un sous-espace vectoriel de E , on suppose $\dim E = n$ et $\dim F = p$, soit $B_F = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $B = (e_1, \ldots, e_p, \ldots, e_n)$ une base de E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

F est stable par f si et seulement si la matrice de f dans la base B est de la forme :

$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$ avec $M_{11} \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{K})$, $M_{12} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $M_{22} \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$