Feuille d'exercices

—

Réduction d'endomorphismes 1

—

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, rapporté à sa base canonique, de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que A^2 est combinison linéaire de I_3 et A en déduire que A est diagonalisable.*
2. *Déterminer le polynôme caractéristique de f*
3. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f et retrouver 1*
4. *Réduire l'endomorphisme f.*

Exercice 2

Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.
Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $\mathtt{Imp} \subset \ker \mathtt{q}$ *et* $\mathtt{Imq} \subset \ker \mathtt{p}$

Exercice 3

Soit p et q deux projections d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

1. *Montrer que p et q commutent si et seulement si il existe 4 sous espaces vectoriels de E E_1, E_1', E_2, E_2' tels que $E = E_1 \oplus E_1' \oplus E_2 \oplus E_2'$ avec p projection sur $E_1 \oplus E_1'$ parallèlement à $E_2 \oplus E_2'$ et q projection sur $E_1 \oplus E_2$ parallèlement à $E_1' \oplus E_2'$*
2. *Montrer que si $p \circ q = q \circ p$ alors $p + q - p \circ q$ est une projection dont on précisera les éléments caractérisques.*

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et diagonalisable, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = A$.

1. *Montrer que B est diagonalisable*
2. *La conclusion subsiste-elle si A n'est pas inversible ?*

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que A est diagonalisable*
2. *Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$ montrer que M est diagonalisable*
3. *Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $M^2 = A$*