Feuille d'exercices

—

Réduction d'endomorphismes 2

—

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, rapporté à sa base canonique, de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de f*
2. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f*
3. *Réduire l'endomorphisme f.*

Exercice 2

On considère la matrice de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.*
2. *Soit X_1 un vecteur propre non-nul. Déterminer un vecteur X_2 solution de l'équation :* $(A + I_3)X = X_1$
3. *Déterminer un vecteur X_3 solution de l'équation :* $(A + I_3)X = X_2$.
4. *Montrer que A est trigonalisable.*

Exercice 3

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et*

   H l'hyperplan d'équation : ${}^tX_0X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

   Montrer que H est stable par f si et seulement si X_0 est un vecteur propre de ${}^tA$.
2. *Déterminer les sous espaces stables des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$ et $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ avec $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$.

On suppose de plus que $BD = DB$ et D est inversible.

1. *Calculer :* $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & O \\ -B & D^{-1} \end{pmatrix}$
2. *Montrer que* $\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$
3. *Déterminer le polynôme caractéristique de :* $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$