Feuille d'exercices

—

Espaces vectoriels

—

indications de solutions

—

Exercice 1 *Soit $\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. E est alors le noyau de la forme linéaire φ définie sur $\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$ par $\varphi(f) = f(0)$. E est alors un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, c'est un hyperplan de $\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$.*

- *De même l'ensemble des fonctions continues qui prennent la valeur 0 en 1 est un hyperplan de $\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$.*
- *L'ensemble E_1 des fonctions continues qui prennent la valeur 1 en 0 n'est pas un $\mathbb{R}$ espace vectoriel pour les lois usuelles des applications, par contre c'est un hyperplan affine de direction l'hyperplan E vu précédemment ($E_1 = 1 + E$ par exemple).*

Exercice 2 *Soit $\mathcal{P}$ (resp.$\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions paires(resp. impaires) définies sur $\mathbb{R}$. On vérifie que : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous espaces vectoriels de E et que leur intersection est réduite au vecteur nul. D'autre part pour toute fonction f de E on a $f = f_1 + f_2$ avec $f_1(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. On a $f_1 \in \mathcal{P}$ et $f_2 \in \mathcal{I}$ d'où $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$*

Exercice 3 *On vérifie que S_1 et S_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$:*

$$\begin{cases} S_1 &= \text{vect} < X^2, X^3 > \\ S_2 &= \ker\varphi_1 \cap \ker\varphi_2 \qquad \text{avec } \varphi_1(P) = P(1) - P'(1)\ ,\varphi_2(P) = P(1) - P''(1) \end{cases}$$

Si $P \in S_1 \cap S_2$ on a : $P(X) = aX^2 + bX^3$ avec (a, b) solution de : $\begin{cases} a+b &= 2a+3b \\ a+b &= 2a+6b \end{cases}$

On en déduit que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $P(X) = (aX^2 + bX^3) + Q(X)$ avec $Q(X) = P(X) - (aX^2 + bX^3)$ et (a, b) solution du système :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} P(1) - (a+b) &= P'(1) - (2a+3b) \\ P(1) - (a+b) &= P''(1) - (2a+6b) \end{cases}$$

De sorte que $Q \in S_2$ et $\mathbb{R}[X] = S_1 \oplus S_2$

(`remarque : comme le système` $(\mathcal{S})$ `possède une unique solution, ceci montre directement que les espaces sont supplémentaires`)

Exercice 4 *Réponses*

1. *L'ensemble des suites bornées est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}$*
2. *L'ensemble des suites géométriques n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}$*
3. *L'ensemble des suites arithmétiques est un sous espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{S}$. $(u_n)_n, u_n = u_0 + nr \to (u_0, r)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel de V sur $\mathbb{K}^2$.*
4. *V n'est pas un sous espace vectoriel.*
5. *L'ensemble des suites convergentes est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}$*
6. *L'ensemble des suites de limite 0 est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}$, c'est un hyperplan de l'espace vectoriel des suites convergentes.*

Exercice 5 *V est le noyau de φ avec $\varphi((x_1,\ldots,x_n)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et pour $x \in E$, $x = \dfrac{\varphi(x)}{n}\mathbf{e} + x_1$ avec $x_1 = x - \dfrac{\varphi(x)}{n}\mathbf{e}$, $x_1 \in V$, de plus $\mathbf{e} \notin V$ de sorte que D et V sont supplémentaires.*

Exercice 6

1. *$u = (6, -4, -3)$ et $(5, 3, -9) = \dfrac{43}{7}a - \dfrac{38}{7}b + \dfrac{30}{7}c$*
2. *u n'est pas combinaison linéaire de $a, b,\ c$, $v = (z+4)a + (z+7)b + zc$ avec $z \in \mathbb{R}$ et w_m est combinaison linéaire de $a, b,\ c$ si et seulement si $m \neq -3$.*
3. *V est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, $((1,1,0),(1,-1,1))$ est une base de V et $x - y - 2z = 0$ est une équation du plan vectoriel V.*