Feuille d'exercices

—

Espaces vectoriels

—

E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Exercice 1 *E désigne l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prennent la valeur 0 en 0. $(E, +, .)$ est-il un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ?.*
Même questions pour :
- *Les fonctions continues qui prennent la valeur 0 en 1 ?*
- *les fonctions continues qui prennent la valeur 1 en 0 ?*

Exercice 2 *Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E*

Exercice 3 *Soit S_1 l'ensemble des polynômes P tels que $P(1) = P'(1) = P"(1)$, et S_2 l'ensemble des polynômes de la forme $aX^2 + bX^3$. Montrer que S_1 et S_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}[X]$*

Exercice 4 *On se place dans le $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Dans les cas suivants, indiquer si V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$:*
1. *V désigne l'ensemble des suites bornées*
2. *V désigne l'ensemble des suites géométriques*
3. *V désigne l'ensemble des suites arithmétiques*
4. *$V = \{(u_n)/u_n^2 = u_n,\ \forall n \in \mathbb{N})\}$.*
5. *V désigne l'ensemble des suites convergentes dans K*
6. *V désigne l'ensemble des suites de limite 0*

Exercice 5 *$E = \mathbb{R}^n$, $e = (1, \cdots, 1)$, D=$\mathbb{R}e$ et $V = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}/\sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$. Montrer que V est un sous espace vectoriel de E et que D et V sont supplémentaires.*

Exercice 6 *E=$\mathbb{R}^3$*
1. *On note $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, -1, 2)$, $c = (1, -2, -1)$. Déterminer $u = 3a - b + 4c$. Exprimer, si possible $v = (5, 3, -9)$ comme combinaison linéaire de a, b, c.*
2. *Ici $a = (1, 1, -2)$, $b = (1, -2, 1)$ et $c = (-2, 1, 1)$. $u = (2, 3, 1)$ est-il combinaison linéaire de a,b et c ?Même question pour $v = (11, -10, -1)$, pour $w_m = (2, 1, m)$ (discuter suivant les valeurs de m)*
3. *Soit $V = \{(x + y, x - y, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que V est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, quelle est sa dimension ? Donner une base de V.*

Exercice 7 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque et U=(u,v,w) une famille de vecteurs de E. On note V=(u,u+v,u+v+w).*
1. *Montrer que si U est libre, V l'est aussi.*
2. *Montrer que si U est génératrice, V l'est aussi.*
3. *Soit $f \in GL(E))$. Montrer que si U est libre, (f(u),f(v),f(w)) l'est aussi*
4. *Soit $f \in L(E))$. Montrer que si U est lié, (f(u),f(v),f(w)) l'est aussi.*
5. *Soit $f \in L(E))$. Montrer que $(f \circ f) = 0 \Longleftrightarrow (Imf \subset \ker f)$*