Feuille d'exercices

—

Rang d'une matrice et systèmes

—

1 Eléments de cours

1.1 Rang d'une matrice

On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant l'une des opérations élémentaires suivantes sur les lignes ou les colonnes d'une matrice :

1. On échange deux lignes (resp. deux colonnes)
2. On multiplie une ligne (resp. une colonne) par un scalaire non nul.
3. On ajoute à une ligne (resp. une colonne) une autre ligne (resp. colonne) multipliée par un scalaire non nul.

A l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice on se ramène à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p,p} & \cdots & a_{pn} \\ 0 & & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \cdots & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\forall i \in \{1, \cdots, p\},\ a_{ii} \neq 0$
Le rang de la matrice est alors p.

1.2 Résolution de systèmes

On s'intéresse aux systèmes linéaires de la forme :

$AX = B$ où $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ Si le système possède des solutions alors l'ensemble des solutions du système est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^q$qui a pour direction le sous-espace vectoriel des solutions du système homogène : $AX = 0$, si le rang de la matrice est k alors cet espace vectoriel a pour dimension $q - k$

2 Exercices

Exercice 1 *Déterminer le rang des matrices suivantes :*

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *(rang=3)* $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ *(rang=3)* $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ *(rang=3)*

$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b} & \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ *avec* $abc \neq 0$*(rang=3)* $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$*(rang=3)* $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$*(rang=2)*

$A_7 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ *(rang=2)* $A_8 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *(rang=2)* $A_9 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *(rang=3)*

$A_{10} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ *(rang=2)*

Exercice 2 *Résoudre :* $A_j X = B_j$ *où :*

$B_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ *(S={(3,-2,2)})* $B_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(S={(1,1,1)})* $B_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *(S={(1,2,-1)})*

$B_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(S={(-a,b,c)})* $B_5 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $B_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *(*$S = \{(1+10t, 7t, t)\ t \in \mathbb{R}\}$*)*

$B_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *(S=*$\{(t, -2t+\frac{1}{3}, t)\ t \in \mathbb{R}\}$*)* $B_8 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *(pas de solution)* $B_9 = B_{10} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

(pour B_9*,S=*$\{(\frac{1}{3}a + -\frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c, \frac{11}{12}a - \frac{23}{24}b + \frac{5}{24}c, \frac{5}{12}a - \frac{5}{24}b - \frac{1}{24}c)\}$*, pour* B_{10} *le système admet une droite affine solution si et seulement si* $2a - 3b + c = 0$, $S = \{(-4t + 2a - b, -5t + 3a - 2b, t),\ t \in \mathbb{R}\}$*)*