

# ESPACES VECTORIELS

—  
C. Susset  
—

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

## 1 Définitions

Soit  $E$  un ensemble non vide

**Définition 1** On appelle  $\mathbb{K}$  espace vectoriel, un ensemble  $E$  non vide muni de deux lois notées  $+$  et  $\cdot$  :  $+$  et  $\cdot$  vérifient :

1.  $(E, +)$  est un groupe commutatif :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \quad x + y &\in E && (+ \text{ est une loi interne}) \\ \forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x + y) + z &= x + (y + z) && (\text{est une loi associative}) \\ \forall (x, y) \in E^2 \quad x + y &= y + x && (+ \text{ est une loi commutative}) \\ \exists e \in E \quad \forall x \in E \quad e + x &= x + e && (+ \text{ possède un élément neutre}) \\ \forall x \in E \quad \exists x' \in E \quad x + x' &= x' + x = O_E && e \text{ se note souvent } O_E \text{ ou } \vec{0} \\ &&& (\text{tout élément possède un symétrique}) \\ &&& x' \text{ se note } -x \end{aligned}$$

2. la loi externe  $\cdot$  vérifie :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad \lambda \cdot x &\in E && (\cdot \text{ est une loi externe}) \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x, y) \in E^2 : &&& \\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot x && \\ (\lambda + \mu) \cdot x &= \lambda \cdot x + \mu \cdot x && \\ \lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot x + \mu \cdot y && \\ 1 \cdot x &= x && \end{aligned}$$

Les éléments de  $(E, +, \cdot)$  sont appelés des vecteurs,  $x \in E$  se note  $\vec{x}$

Les éléments de  $\mathbb{K}$  sont appelés des scalaires.

**Définition 2** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et  $F$  une partie de  $E$ .  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F$  est non vide et  $(F, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

**Proposition 1** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et  $F$  une partie de  $E$ .  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

1.  $F \neq \emptyset$
2.  $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x + \lambda \cdot y \in F$

Dans la suite  $(E, +, \cdot)$  désignera un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel noté simplement  $E$

## 2 Règles de calculs

$$\begin{aligned} - \forall \vec{x} \in E \quad 0 \cdot \vec{x} &= \vec{0} \\ - \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot \vec{0} &= \vec{0} \\ - \alpha \cdot \vec{x} = \vec{0} &\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0} \\ - \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E \quad \alpha \cdot (-\vec{x}) &= (-\alpha) \cdot \vec{x} = -(\alpha \cdot \vec{x}) \end{aligned}$$

## 3 Applications linéaires

**Définition 3** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels, on appelle application linéaire de  $E$  dans  $F$  toute application  $f$  de  $E$  dans  $F$  telle que :  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$  et  $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

On note  $\mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Si  $E = F$  les éléments de  $L(E, F)$  s'appellent des **endomorphismes** de  $E$  et on note  $\mathbf{L}(\mathbf{E}) = \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$

Si  $f \in L(E, F)$  et  $f$  est bijective on dit que  $f$  est un **isomorphisme**, on note  $\mathbf{GL}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  l'ensemble des isomorphismes de  $E$  sur  $F$

Si  $f \in L(E)$  et  $f$  est bijective on dit que  $f$  est un **automorphisme**, on note  $\mathbf{GL}(\mathbf{E})$  l'ensemble des automorphismes de  $E$

**Proposition 2**  $(L(E, F), +, \cdot)$  et  $(L(E), +, \cdot)$  sont deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels.

**!**  $\mathbf{GL}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  et  $\mathbf{GL}(\mathbf{E})$  ne sont pas des sous espaces vectoriels de  $(\mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}), +, \cdot)$  et  $(\mathbf{L}(\mathbf{E}), +, \cdot)$

**Définition 4** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels et  $f \in L(E, F)$ .

- On appelle **noyau** de  $f$  la partie de  $E$  notée  $\ker f$  et définie par  $\ker f = f^{-1}(0_F) = \{\vec{x} \in E, f(\vec{x}) = 0_F\}$
- On appelle **image** de  $f$  la partie de  $F$  notée  $\mathbf{Im} f$  et définie par  $\mathbf{Im} f = f(E) = \{\vec{y} \in F \text{ tq } \exists \vec{x} \in E f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

**Proposition 3** Soit  $f \in L(E, F)$ ,  $\ker f$  est un sous espace vectoriel de  $E$  et  $\mathbf{Im} f$  est un sous espace vectoriel de  $F$

## 4 Combinaisons linéaires

Soit  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ .

Le vecteur de  $E$ ,  $\vec{x} = \sum_1^n \lambda_i \vec{x}_i$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$

**Proposition 4** Soit  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$   $p$  vecteurs de  $E$ .

L'ensemble des combinaisons linéaires de  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

On note  $\mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \rangle = \{\vec{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{x}_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\}$

**Proposition 5** Soit  $A \subset E$ , il existe un plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  au sens de l'inclusion contenant  $A$ . Ce sous-espace vectoriel est unique, il s'appelle le sous espace vectoriel engendré par  $A$ , on le note  $\mathbf{vect} \langle A \rangle$  on a :

$$\mathbf{vect} \langle A \rangle = \bigcap_{\substack{F \subset E \\ F \text{ seu}}} F \quad \text{et} \quad \mathbf{vect} \langle A \rangle = \left\{ \sum_{\text{finie}} \lambda_i \cdot \vec{x}_i, \vec{x}_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K} \forall i \right\}$$

**Remarque 1**  $\mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \rangle = \mathbf{vect} \langle \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\} \rangle$

$\mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \rangle$  est le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les vecteurs  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ .

**Proposition 6** Soit  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$   $p$  vecteurs de  $E$  et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ .

$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \vec{x}_i \in F$  alors  $\mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \rangle \subseteq F$ .

**Propriété 1** Soit  $F = \mathbf{vect} \langle \vec{x}_i \rangle_{i \in I}$  et  $G = \mathbf{vect} \langle \vec{y}_j \rangle_{j \in J}$  deux sous espaces vectoriels de  $E$  engendrés respectivement par  $(\vec{x}_i)_{i \in I}$  et  $(\vec{y}_j)_{j \in J}$

Si  $\forall i \in I \vec{x}_i \in G$  alors  $F \subset G$

Si  $\forall i \in I \vec{x}_i \in G$  et  $\forall j \in J \vec{y}_j \in F$  alors  $F = G$

**Proposition 7** Soit  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$   $p$  vecteurs de  $E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des scalaires.

- $\mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \rangle = \mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p + \lambda_p \cdot \vec{x}_1 \rangle$
- $\mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_p \rangle = \mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_p \rangle$
- Si  $\lambda_i \neq 0$   $\mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_p \rangle = \mathbf{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \lambda_i \cdot \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_p \rangle$

Ces propriétés seront utilisées dans le chapitre des espaces vectoriels de dimension finie.

**Proposition 8**  $\mathbf{vect} \langle A \rangle$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , et si  $A \subset F$  avec  $F$  sous espace vectoriel de  $E$  alors  $\mathbf{vect} \langle A \rangle \subset F$ .  $\mathbf{vect} \langle A \rangle$  est le sous espace vectoriel de  $E$  engendré par  $A$ .

## 5 Somme de sous espaces vectoriels

### 5.1 Définition

**Définition 5** Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ .

On appelle somme des sous espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  et on note  $E_1 + E_2$  la partie de  $E$  définie par :

$$E_1 + E_2 = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in E, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ et } \vec{x}_2 \in E_2\}$$

**Proposition 9**  $E_1 + E_2$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , c'est le sous espace vectoriel engendré par  $E_1 \cup E_2$

$$E_1 + E_2 = \text{vect} \langle E_1 \cup E_2 \rangle$$

### 5.2 Somme directe

**Définition 6** Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe si et seulement si  $\forall \vec{x} \in E_1 + E_2, \exists!(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$  tq  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ .

On note  $E_1 \oplus E_2$  la somme des deux sous espaces  $E_1$  et  $E_2$  lorsque celle-ci est directe.

**Proposition 10** Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ .

$E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe si et seulement si  $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

### 5.3 Espaces supplémentaires

**Définition 7** Deux sous espaces vectoriels de  $E$  sont dits supplémentaires si et seulement si  $E = E_1 \oplus E_2$

**Proposition 11** Deux sous espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  de  $E$  sont supplémentaires si et seulement si

1.  $\forall \vec{x} \in E, \exists(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$  tq  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
2.  $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

### 5.4 Somme de p sous espaces vectoriels

Pour  $E_1, \dots, E_p$  p sous-espaces vectoriels de  $E$  on définit :

$$E_1 + \dots + E_p = \text{vect} \langle E_1 \cup \dots \cup E_p \rangle = \{\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_p \in E, (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\}$$

**Définition 8** Soit  $E_1, \dots, E_p$  p sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $E_1, \dots, E_p$  sont en somme directe si

et seulement si :  $\forall \vec{x} \in E_1 + \dots + E_p$ , il existe une unique famille  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  tq  $\vec{x} = \sum_{i=1}^p \vec{x}_i$

on note  $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$

**Proposition 12**  $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  si et seulement si  $\forall(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = \dots = \vec{x}_p = \vec{0}$

### 5.5 Somme d'espaces vectoriels et applications linéaires

#### 5.5.1 Définition d'application linéaire

**Proposition 13** Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous espaces supplémentaires de  $E$ ,  $F$  un espace vectoriel,  $u_1$  et  $u_2$  deux applications linéaires de  $\mathcal{L}(E_1, F)$  et  $\mathcal{L}(E_2, F)$  respectivement.

Il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que les restrictions de  $u$  à  $E_1$  et  $E_2$  respectivement sont  $u_1$  et  $u_2$ ,  $u|_{E_1} = u_1$  et  $u|_{E_2} = u_2$

On a un résultat similaire si  $E$  est la somme de  $p$  sous espaces vectoriels.

**Proposition 14** Soit  $E_1, E_2 \dots E_p$  p sous espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = E_1 \oplus E_2 \dots \oplus E_p$ ,  $F$  un espace vectoriel,  $u_1, u_2 \dots u_p$  p applications linéaires de  $\mathcal{L}(E_1, F), \mathcal{L}(E_2, F) \dots \mathcal{L}(E_p, F)$  respectivement

Il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que les restrictions de  $u$  à  $E_1, E_2 \dots E_p$  soient respectivement  $u_1, u_2 \dots u_p$ ,  $u|_{E_1} = u_1, u|_{E_2} = u_2 \dots u|_{E_p} = u_p$

On détermine une application linéaire de  $\mathcal{L}(E, F)$  et ses propriétés en étudiant ses restrictions à des sous espaces vectoriels en somme directe dont la somme est  $E$ .

**Remarque 2** On utilisera la proposition précédente pour l'étude des endomorphismes plutôt sous la forme suivante :

**Proposition 15** Soit  $E_1, E_2 \dots E_p$   $p$  sous espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = E_1 \oplus E_2 \dots \oplus E_p$ ,  $u_1, u_2 \dots u_p$   $p$  applications linéaires de  $\mathcal{L}(E_1), \mathcal{L}(E_2) \dots \mathcal{L}(E_p)$  respectivement  
 Il existe un unique endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que les restrictions de  $u$  à  $E_1, E_2 \dots E_p$  soient respectivement  $u_1, u_2 \dots u_p$ ,  $u|_{E_1} = u_1$ ,  $u|_{E_2} = u_2 \dots u|_{E_p} = u_p$

### 5.5.2 Projections vectorielles

#### Définition 9

Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ ,  $E = E_1 \oplus E_2$

Soit  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ ,  $\forall \vec{x} \in E_1$ ,  $u_1(\vec{x}) = \vec{x}$  et  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ ,  $\forall \vec{x} \in E_2$ ,  $u_2(\vec{x}) = \vec{0}$

On appelle projection vectorielle sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  l'unique endomorphisme  $p$  de  $E$  dont les restrictions à  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement  $u_1$  et  $u_2$

$\forall \vec{x} \in E$  avec  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ ,  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ , on a :  $p(\vec{x}) = \vec{x}_1$

$E_1 = \ker(p - Id)$  et  $E_2 = \ker p$

**Théorème 1** Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ ,  $p$  est une projection vectorielle si et seulement si  $p = p \circ p$ .

On a alors  $E = \text{Imp} \oplus \ker p$  avec  $\text{Imp} = \ker(p - \text{id})$  et  $p$  est la projection vectorielle sur  $\text{Imp}$  parallèlement à  $\ker p$ .

### 5.5.3 Symétries vectorielles

#### Définition 10

Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ ,  $E = E_1 \oplus E_2$

Soit  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ ,  $\forall \vec{x} \in E_1$ ,  $u_1(\vec{x}) = \vec{x}$  et  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ ,  $\forall \vec{x} \in E_2$ ,  $u_2(\vec{x}) = -\vec{x}$

On appelle symétrie vectorielle sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  l'unique endomorphisme  $s$  de  $E$  dont les restrictions à  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement  $u_1$  et  $u_2$

$\forall \vec{x} \in E$  avec  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ ,  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ , on a :  $s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$E_1 = \ker(s - Id)$  et  $E_2 = \ker(s + Id)$

**Théorème 2** Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$ ,  $s$  est une symétrie vectorielle si et seulement si  $s \circ s = Id$ .

On a alors  $E = \ker(s - Id) \oplus \ker(s + Id)$ ,  $s$  est la symétrie vectorielle sur  $\ker(s - Id)$  parallèlement à  $\ker(s + Id)$ .

### 5.5.4 Affinités vectorielles

#### Définition 11

Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ ,  $E = E_1 \oplus E_2$  et  $a \in \mathbb{K}$ .

Soit  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ ,  $\forall \vec{x} \in E_1$ ,  $u_1(\vec{x}) = \vec{x}$  et  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ ,  $\forall \vec{x} \in E_2$ ,  $u_2(\vec{x}) = a\vec{x}$

On appelle affinité vectorielle sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  de rapport  $a$ , l'unique endomorphisme  $f$  de  $E$  dont les restrictions à  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement  $u_1$  et  $u_2$

$\forall \vec{x} \in E$  avec  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ ,  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ , on a :  $f(\vec{x}) = \vec{x}_1 + a\vec{x}_2$

$E_1 = \ker(f - Id)$  et  $E_2 = \ker(f - aId)$