SERIES

—

C. Susset

—

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide des principaux résultats à connaître sur les séries.

1 Séries à termes réels ou complexes

1.1 Généralités

- On appelle série de terme général u_n, on note $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ la suite $(S_n)_n$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ où $(u_n)_n$ est une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ où $u_0 = S_0$ et $u_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geq 1$.
- la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_n$ converge. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l$, on dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et a pour somme l. On note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = l$.
- Pour une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est la somme partielle d'ordre n et si la série converge et a pour somme S alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k\geq n+1} u_k$ converge et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S = S_n + R_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.
- Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge on dit que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, dans ce cas elle est convergente. Si la série converge sans converger absolument on dit qu'elle est semi-convergente.

1.2 Séries à termes positifs

1.2.1 convergence

$u_n \geq 0$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si les sommes partielles sont majorées.

1.2.2 Relations de comparaison

- Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $0 \leq u_n \leq v_n$ alors $\left\{\begin{array}{lcl} \sum v_n \text{ converge} & \Rightarrow & \sum u_n \text{ converge} \\ \sum u_n \text{ diverge} & \Rightarrow & \sum v_n \text{ diverge} \end{array}\right.$
- Si $\forall n \geq 0$, $u_n \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $v_n \geq 0$ avec $u_n = \mathrm{O(v_n)}$ alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sum v_n \text{ converge} & \Rightarrow & \sum u_n \text{ converge absolument et } \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{u_k} = \mathrm{O}(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{v_k}) \\ \sum u_n \text{ diverge} & \Rightarrow & \sum v_n \text{ diverge et } \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{u_k} = \mathrm{O}(\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{v_k}) \end{array}\right.$$

- Si $\forall n \geq 0$, $u_n \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $v_n \geq 0$ avec $u_n = o(v_n)$ alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sum v_n \text{ converge} & \Rightarrow & \sum u_n \text{ converge absolument et } \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{u_k} = \mathrm{o}(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{v_k}) \\ \sum u_n \text{ diverge} & \Rightarrow & \sum v_n \text{ diverge et } \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{u_k} = \mathrm{o}(\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{v_k}) \end{array}\right.$$

– Si $\forall n \geq 0,\ u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ avec $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum v_n$ converge et

$$\begin{cases} \text{Si les deux séries convergent} & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \\ \text{Si les deux séries divergent} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k \end{cases}$$

1.2.3 Comparaison avec une intégrale

– Soit f une application continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ on a :

1. posons $\forall n \geq 1,\ w_n = \left(\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathtt{dt}\right) - f(n)$ on a $\sum w_n$ converge.
2. $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$

1.3 Séries à termes de signes quelconques

1.3.1 Règle de d'Alembert

$$\text{Si } \lim_{n \Rightarrow +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \text{ Alors } \begin{cases} l < 1 & \Rightarrow & \sum u_n \text{ est absolument convergente} \\ l > 1 & \Rightarrow & \sum u_n \text{ est divergente} \\ l = 1 & & \text{on ne peut pas conclure.} \end{cases}$$

1.3.2 Critère de Cauchy

$\sum u_n$ converge si et seulement si $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ tq\ n \geq N$ et $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \epsilon$

1.3.3 Théorème Spécial des Séries Alternées(appelé parfois théorème de Leibniz)

$$\textbf{Si} \begin{cases} 1) & (u_n)_n \text{ est à termes positifs} \\ 2) & (u_n)_n \text{ est décroissante} \\ 3) & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{Alors} \begin{cases} 1) & \sum u_n \text{converge} \\ 2) & \forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \\ 3) & \forall n \in \mathbb{N}\ |R_n| \leq u_{n+1} \end{cases}$$

1.3.4 Produit de Cauchy

$$\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} v_n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} w_n\right) \text{ avec } w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}.$$

Le produit de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$