# Suites et Séries géométriques

—

C. Susset

—

**Définition 1** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique si et seulement si $\exists q \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$, $q$ est appelé la raison de la suite géométrique.*

**Proposition 1** *Une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement déterminée par son premier terme $u_0 = a$, $a \in \mathbb{K}$, et sa raison $q$, $q \in \mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $a$ et de raison $q$.*
*On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq^n$.*

**Proposition 2 (convergence d'une suite géométrique)** *la suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors $\lim\limits_{n->+\infty} u_n = 0$ ou $q = 1$ et alors la suite est constante $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.*

**Définition 2** *On appelle série géométrique une série dont le terme général est le terme général d'une suite géométrique .*

**Proposition 3 (Somme des n premiers termes)** *La somme des n+1 premiers termes d'une série géométrique de premiers termes $u_0$ et de raison $q$ est :*
$\sum\limits_{k=0}^{n} u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\quad (= premierterme \dfrac{1-raison^{nombre\,\det remes}}{1-raison})$

**Proposition 4 (convergence d'une série géométrique)** *La série géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \neq 0$ converge si et seulement si $|q| < 1$ .*
*Si $|q| < 1$ on a alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 \dfrac{1}{1-q}$ $(= \dfrac{premierterme}{1-raison})$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_0 \dfrac{q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{u_{n+1}}{1-q} (= \dfrac{premierterme}{1-raison})$ de plus $\dfrac{u_0}{1-q} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k + R_n$*

## Exemples

**Exercice 1** *Montrer que $\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$*

**solution :** pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $\forall t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{t+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + R_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + \dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}$
de sorte que pour : $x \in [0,1[$ on a $\int_0^x \dfrac{dt}{1+t} = \int_0^x (\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^k) dt + \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1+t}\, dt$
soit $\int_0^x \dfrac{dt}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^k dt + \int_0^x \dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}\, dt$ en faisant tendre $x$ vers 1 on obtient :
$\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^k dt + \int_0^1 \dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}\, dt$ avec $0 \leq |\int_0^1 \dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt| \leq \int_0^1 t^{n+1} dt \leq \dfrac{1}{n+2}$ d'où $\lim\limits_{n->+\infty} \int_0^1 \dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = 0$

**Exercice 2 (à chercher)** *On pose $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n}$, montrer que $F$ est définie et de classe $C^1$sur $]0, +\infty[$. Calculer $F'(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, en déduire $F(x)$.*