Feuille d'exercices

—

Inégalités - Séries - Intégration

—

L'objet de cette feuille est d'utiliser les inégalités afin de montrer que des séries convergent ou divergent et que des fonctions numériques continues sur un intervalle sont ou ne sont pas intégrables.
La partie I donne quelques éléments de cours sur les séries et les intégrales. La partie II présente des exercices sur les séries et la partie III des exercices d'intégration.

1 Eléments de cours

1.1 Séries

1.1.1 Définitions

Définition 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.*
On note $\sum_{n\geq 0} u_n$ la série de terme général u_n
On dit que que la série converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la limite s'appelle la somme de la série et on note $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$
Lorsque la série ne converge pas on dit quelle diverge.

Définition 2 *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument si et seulement si $\sum_{n\geq} |u_n|$ converge.*

Exemple 3 *La série géométrique $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Exemple 4 *La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$*

Exemple 5 *La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$*

1.1.2 Propriétés

Rappel : Une suite réelle croissante converge si et seulement si elle est majorée.

Propriété 6 *Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq v_n$*
Alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge
$\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n$ diverge

Propriété 7 *Si une série est absolument convergente Alors elle est convergente.*

1.2 Intégrale

1.2.1 Définitions

Soit $I = [a, b[$ un intervalle où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^+$ (f est positive).

Définition 8 *On dira que f est intégrable sur I si et seulement si* $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathtt{dt} \in \mathbb{R}$

On notera $f \in \mathcal{L}^1([a, b[)$ *et* $\int_a^b f(t))\mathtt{dt} = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t))\mathtt{dt}$

Définition 9 *Soit f est une fonction continue de I dans* $\mathbb{R}$*, on dira que f est intégrable sur I si et seulement si* $|f|$ *est intégrable sur I on notera encore* $f \in \mathcal{L}^1(I)$.

Si $f \in \mathcal{L}^1(I)$, on a encore $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathtt{dt} \in \mathbb{R}$ et on note $\int_a^b f(t))\mathtt{dt} = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t))\mathtt{dt}$

1.2.2 Propriétés

Rappel : Une fonction croissante de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ admet une limite en b si et seulement si elle est majorée sur $[a, b[$ et si f est continue et positive sur $[a, b[$ alors la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathtt{dt}$ est croissante sur $[a, b[$.

Propriété 10 *Si* $\forall x \in I \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ *avec f et g continues sur I*
Alors $g \in \mathcal{L}^1(I) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(I)$
$f \notin \mathcal{L}^1(I) \Rightarrow g \notin \mathcal{L}^1(I)$

Propriété 11 *Soit* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *continue et décroissante sur* $[0, +\infty[$*, on a :*
$f \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[) \Longleftrightarrow \sum_{n \leq 0} f(n)$ *converge.*

2 Exercices sur les séries

Exercice 1 *Etudier la convergence des séries suivantes :*

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin^2 n}{1 + n^2}$ *2.* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot \sin(\frac{1}{n})$ *3.* $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-n}}{2 + \cos n}$ *4.* $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{1 + n}$ *5.* $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$

Exercice 2 *Soit* $\sum_{n \leq 0} u_n$ *une série à termes positifs convergente.*
Etudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot u_n$ *et de* $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{1 + u_n}$

3 Exercices sur les intégrales

Exercice 3 *Soit* $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$*, montrer que* $f_\alpha \in \mathcal{L}^1([1, +\infty])$ *si et seulement si* $\alpha > 1$

Exercice 4 *Montrer que* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$

Exercice 5 *Les fonctions f suivantes sont-elles des éléments de $\mathcal{L}^1([0,+\infty[)$?*
$f(x) = e^{-ax}$ *avec* $a > 0$ $\quad f(x) = \frac{e^{-x}}{2+cos(x)}$ $\quad f(x) = (\cos x + \sin x)e^{-x}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$ $\quad f(x) = \frac{\sin x}{x\ln(1+x)}$

Exercice 6 *Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ avec $p \in]1,+\infty]$, à l'aide d'inégalités et d'intégration effectuer un encadrement de u_n et en déduire suivant les valeurs de p la nature de la série de terme général u_n*

Exercice 7 *Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^m \sin^2 x} \mathtt{dx} \in \mathbb{R}$*
(cet exercice est plus délicat ! On pourra utiliser une comparaison avec une série)