Feuille d'exercices

—

Séries numériques

—

Exercice 1 *Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :*

1. $u_n = \dfrac{n+2}{n^2+1}$ *2.* $u_n = \ln(1+\dfrac{1}{n^2})$ *3.* $u_n = \dfrac{2^n}{(n+1)(n+2)}$ *4.* $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

Exercice 2 *Etudier la convergence et calculer :*

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2-1)}$ *2.* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k^2+2k+3}{k!}$ *3.* $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \ln(1-\frac{1}{k^2})$

Exercice 3

1. *Pour* $x \in]-1,+1[$ *calculer* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$
2. *Pour* $x \in]-1,+1[$ *calculer* $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$
3. *En déduire pour* $x \in]-1,+1[$ *la convergence et la somme de* $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$
4. *Calculer après avoir étudié la convergence :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 4

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, *montrer que* $S_n \sim \ln(n)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.
2. *On considère la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = a & \text{avec} \quad a \in]0,1[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$
   Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$
3. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n}$.
4. *Montrer que la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ *converge et calculer sa somme en fonction de* a.
5. *Montrer que :* $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + 1 + u_n + O(u_n^2)$
6. *En déduire que* $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.
7. *Etudier suivant les valeurs de* α *la convergence de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^\alpha$.

Exercice 5 *On considère la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = a & a > 0 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$
Déterminer un équivalent de u_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Exercice 6 *Etudier et déterminer un équivalent lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *de la suite définie par* $u_0 > 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.