Feuille d'exercices

—

Suites numériques

—

Exercice 1

Etudier la convergence des suites de termes généraux :
$u_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$, $v_n = \dfrac{1-n^2}{n+2}$ *et* $w_n = u_n + v_n$.

Exercice 2

On considère les deux suites numériques : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *et* $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$.

Montrer que ces deux suites sont adjacentes, en déduire qu'elles sont convergentes et montrer que la limite n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 3

$P_n(x) = 1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$. *Montrer que* P_{2n} *n'a pas de racine et que* P_{2n+1} *possède une unique racine* α_n. *Etudier la limite de* α_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Exercice 4

Etudier les suites définies par :

1. $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$
2. $u_0 = \frac{1}{2},\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$
3. $u_0 > 0,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$
4. $u_0 > 0,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$

Exercice 5

Montrer que de toute suite réelle on peut extraire une suite monotone. En déduire que les suites de cauchy réelles convergent et que les compacts de $\mathbb{R}$ *sont les ensembles fermés et bornés.*

Exercice 6

On considère la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+2})$
Montrer que $u_n = \dfrac{(-1)^n \pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$

Exercice 7

On considère les deux suites définies par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ *et* $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Montrer que ces deux suites sont adjacentes. La limite commune (souvent notée C *ou* γ*)est appelée la constante d'Euler.*

En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$