Feuille d'exercices

—

Fonctions numériques

—

Utilisation de Dl pour les études de fonctions

Exercice 1 1. *Etudier et représenter la fonction définie par :* $f(x) = \ln(1+e^x)$ *(on montrera que la courbe représentative de* f *admet une asymptote oblique.)*

2. *Etudier et représenter la fonction définie par :* $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ *(en particulier montrer que* f *se prolonge en une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *en 0).*

Exercice 2 *On considère la fonction définie par :* $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{e^x - 1}{x})$

1. *Montrer que* f *se prolonge en 0 en une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$
2. *Montrer que la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé du plan possède un centre de symétrie.*
3. *Etudier les limites de* f *aux bornes de l'ensemble de définition.*
4. *Etudier les variations de* f.
5. *Tracer la courbe représentative de* f

Dérivation

Exercice 3 *Soit* f *une fonction dérivable sur un intervalle* I. *Montrer que* f' *vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (indication : utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues bien choisie)*

Exercice 4 *On pose* $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

1. *Montrer que* P_n *est une fonction polynôme de degré* n
2. *Montrer que* P_n *possède* n *racines distinctes dans l'intervalle* $]-1, 1[$ *(on pourra utiliser le théorème de Rolle)*

Formule de Taylor

Exercice 5 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0,$$
$$\exists \lambda > 0,\ \mathtt{tq}\ \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N},\ \sup_{\mathbb{R}} |\mathrm{f^n}| \leq \lambda^{\mathrm{n}} \mathrm{n}!$$

Montrer que f *est nulle sur l'intervalle* $]-\dfrac{1}{\lambda}, +\dfrac{1}{\lambda}[$, *puis sur* $\mathbb{R}$

Exercice 6 *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *Déterminer une primitive de la fonction définie par :* $f(x) = x^n e^x$.

Fonctions convexes

Exercice 7 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue telle que :* $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer que f *est convexe et en déduire que :*
si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue et que* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *alors* f *est convexe.*