DEVELOPPEMENTS LIMITES

—

C. Susset

—

1 Définitions

Voici quelques notions utiles pour étudier une fonction au voisinage d'un point et donc pour aborder les développements limités.

1.1 Voisinage d'un point

Définition 1 *Soit* $a \in \mathbb{R}$*, on appelle voisinage de* a *toute partie* $V \in \mathbb{R}$ *contenant un intervalle ouvert contenant* a.

Définition 2 *Soit* $a \in \mathbb{R}$*, on appelle voisinage à droite (resp. gauche) de* a *toute partie* $V \in \mathbb{R}$ *contenant un intervalle ouvert de la forme* $]a,\alpha[, a < \alpha$ *(resp.*$]\alpha, a[, \alpha < a$*).*

Noter que dans cette définition a n'appartient pas nécessairement au voisinage à droite ou à gauche.

Définition 3 *On appelle voisinage de* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) toute partie de* $\mathbb{R}$ *contenant un intervalle de la forme* $]\alpha, +\infty[$ *(resp.* $]-\infty, \alpha[$*),* $\alpha \in \mathbb{R}$

Notation : $\overline{\mathbb{R}}$ désignera l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$ on désignera par $\mathcal{V}_a$ (resp. $\mathcal{V}_a^+, \mathcal{V}_a^-$) l'ensemble des voisinages (resp. voisinage à droite, à gauche) de a.

1.2 Etude au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Définition 4 *On dit qu'une fonction numérique de la variable réelle à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) est définie au voisinage d'un point* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *si et seulement si l'ensemble de définition de la fonction contient un voisinage de* a

Définition 5 *On dit qu'une fonction numérique de la variable réelle à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *est définie sur voisinage à droite (resp. à gauche) d'un point* $a \in \mathbb{R}$ *si et seulement si l'ensemble de définition de la fonction contient un voisinage à droite (resp. à gauche) de* a

Pour une fonction numérique de la variable réelle f et $a \in \mathbb{R}$ on pose $f_a(h) = f(a+h)$. f est définie au voisinage de a si et seulement si f_a est définie au voisinage de 0. Etudier f au voisinage de a est équivalent à étudier f_a au voisinage de 0.

Pour une fonction numérique de la variable réelle f et $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) on pose $f_a(h) = f(\frac{1}{h})$, . f est définie au voisinage de a si et seulement si f_a est définie sur un voisinage à droite de 0 (resp. à gauche de 0). Etudier f au voisinage de a est équivalent à étudier f_a sur un voisinage à droite de 0 (resp. à gauche de 0).

Dans la suite les fonctions considérées seront des fonctions numériques de la variable réelle définies au voisinage de 0, le lecteur adaptera les définitions et les résultats pour une fonction définie sur un voisinage à droite ou à gauche de 0.

1.3 Comparaison des fonctions

1.3.1 Domination

Définition 6 *Soit* f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* 0*, on dit que* f *est dominée par* g *(on dit parfois que* f *est bornée devant* g*) au voisinage de* 0 *si et seulement si il existe un voisinage* V *de* 0 *et un réel* $M > 0$ *tel que* $\forall x \in V$, $|f(x)| \leq M|g(x)|$

On note : $f \preceq g$ *(notation de Hardy), ou* $f = O(g)$ *(notation de Landau)*

Définition 7 *On dit qu'une fonction* f *est bornée au voisinage de* 0 *si et seulement si* $f = O(1)$*, c'est à dire qu'il existe* $M > 0$ *et un voisinage* V *de 0 tel que* $\forall x \in V$, $|f(x)| \leq M$

Proposition 1 *Soit* f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* 0*, on suppose que* g *ne s'annule pas au voisinage de* 0*.* $f = O(g)$ *si et seulement si* $\dfrac{f}{g}$ *est une fonction bornée au voisinage de* 0

1.3.2 Prépondérance

Définition 8 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on dit que f est négligeable devant g, ou que g est prépondérante devant f au voisinage de 0 si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage V de 0 tel que $\forall x \in V,\ |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|$.*

On note : $f \ll g$ (notation de Hardy), ou $f = o(g)$ (notation de Landau)

Définition 9 *On dit qu'une fonction f a pour limite 0 en 0 si et seulement si $f = o(1)$, c'est à dire que $\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_0,\ \forall x \in V,\ |f(x)| \leq \epsilon$*

On note : $\lim\limits_0 f = 0$ ou $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Proposition 2 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de 0. On a l'équivalence suivante : $f = o(g)$ si et seulement si $\lim\limits_0 \dfrac{f}{g} = 0$*

1.3.3 Equivalence

Définition 10 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on dit que f est équivalente à g au voisinage de 0 si et seulement si $f - g = o(g)$*

On note : $f \sim g$

Proposition 3 *On a : $f \sim g$ si et seulement si $g \sim f$.*

Définition 11 *On dit qu'une fonction f a pour limite l, $l \in \mathbb{R}^*$ en 0 si et seulement si $f \sim l$, c'est à dire que $\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_0,\ \forall x \in V,\ |f(x) - l| \leq \epsilon$*

On note : $\lim\limits_0 f = l$ ou $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$

Proposition 4 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de 0. On a l'équivalence suivante : $f \sim g$ si et seulement si $\lim\limits_0 \dfrac{f}{g} = 1$*

2 Développement limités

Les développements limités permettent de préciser le comportement d'une fonction numérique au voisinage d'un point. S'il n'y a pas d'indication les fonctions considérées seront des fonctions numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies au voisinage de 0.

2.1 Définition

Définition 12 *La fonction f admet un développement limité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) au voisinage de 0 (on notera f admet un $DL_n(0)$) si et seulement si Il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ $a_k \in \mathbb{K},\ k \in \{0, \cdots, n\}$ tel que au voisinage de 0, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$.*

Exemple 1 *$e^{it} = 1 + it + o(t)$ est un $DL_1(0)$*

Proposition 5
Si
f admet un $DL_n(0)$
Alors
- *Celui-ci est unique c'est à dire que le polynôme P_n est unique.*
- *f admet un $DL_k(0)$, $\forall k \leq n$, celui-ci est obtenu en prenant le reste de la division euclidienne du développement de f par X^{n+1}*

Définition 13 *Si f admet un $DL_n(0)$, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ avec $P_n(x) = a_p x^p + \cdots + a_n x^n$, $a_p \neq 0$, p est la valuation de P_n et $a_p x^p$ est la partie principale du développement limité.*

Proposition 6

1. *f admet un $DL_0(0)$ si et seulement si $\lim\limits_0 f$ existe dans $\mathbb{K}$, on a alors $f(x) = \lim\limits_0 f + o(1)$*
2. *f admet un $DL_1(0)$ si et seulement si f est dérivable en 0, on a alors $f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x)$*

Remarque 1

1. *On peut parler de $DL(0)$ même si $f(0)$ n'existe pas du moment que f est définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0 on a alors :*
   - *f admet un $DL_0(0)$ si et seulement si f se prolonge par continuité en 0*
   - *f admet un $DL_1(0)$ si et seulement si f se prolonge par continuité en 0 et le prolongement est dérivable en 0.*
2. *Pour $n \geq 2$, f peut admettre un $DL_n(0)$ sans que $f^{(n)}(0)$ existe. Exemple : $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ admet un $DL_2(0)$ mais $f^{(2)}(0)$ n'existe pas.*

3 Propriétés

3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 1
Si *f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0*
Alors *f admet un $DL_n(0)$ et* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^k(0) + o(x^n)$.

Remarque 2 *f définie et de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a admet un $DL_n(a)$ car $g(h) = f(a+h)$ admet un $DL_n(0)$ et on a :* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^k(a) + o((x-a)^n)$

Remarque 3 *En fait le théorème s'applique avec des hypothèses plus faibles :*

Théorème 2
Si *$f^{(n-1)}$ est définie au voisinage de 0 et $f^n(0)$ existe*
Alors *f admet un $DL_n(0)$ et* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^k(0) + o(x^n)$.

Remarque 4 *On peut parfois alléger les calculs, c'est à dire économiser un terme dans le développement en utilisant le théorème sous la forme suivante :*

Théorème 3
Si *f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0*
Alors *f admet un $DL_{n-1}(0)$ et* $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^k(0) + O(x^n)$.

On dit que f admet un développement limité d'ordre $n-1$ au sens "fort". Une fonction qui est un $O(x^n)$ est un $o(x^{n-1})$. En terme de "rapidité" de convergence un $o(x^{n-1})$ converge vers 0 moins "vite" qu'un $O(x^n)$ qui lui-même converge moins "vite" qu'un $o(x^n)$

3.2 Opérations sur les DL

3.2.1 Addition

Théorème 4
Si
- *f admet un $DL_n(0)$,* $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$
- *g admet un $DL_n(0)$,* $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

Alors
$f+g$ admet un $DL_n(0)$ $(f+g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + o(x^n)$

Le développement limité de $f+g$ en 0 à l'ordre n est la somme des développements limités de f et g à l'ordre n

3.2.2 Multiplication

Théorème 5
Si
– f *admet un* $DL_n(0)$, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$
– g *admet un* $DL_n(0)$, $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$
Alors
$f \cdot g$ *admet un* $DL_n(0)$ $(f \cdot g)(x) = (R_n)(x) + o(x^n)$ *où* R_n *est le reste de la division euclidienne de* $P_n \cdot Q_n$ *par* X^{n+1}.

Exemple 2 *Déterminer le* $DL_5(0)$ *de la fonction* $h(x) = (1 - \cos(x)) \cdot \ln(1 + x)$.
On a :

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad et \quad \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

$$P_5 \cdot Q_5(x) = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) \cdot (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + o(x^5)$$

$$h(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + o(x^5)$$

3.2.3 Rapport

Théorème 6
Si

f *admet un* $DL_n(0)$, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

g *admet un* $DL_n(0)$, $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$g(0) \neq 0$

Alors $\dfrac{f}{g}$ *admet un* $DL_n(0)$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = R_n(x) + o(x^n)$ *où* R_n *est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de* P_n *par* Q_n.

Exemple 3 *Déterminer le* $DL_5(0)$ *de* tan
on a :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) \cdot (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5) + o(x^5) \quad de\ sorte\ que :$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

3.2.4 Composée

Théorème 7
Si

f *admet un* $DL_n(0)$, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

g *admet un* $DL_n(0)$, $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$g(0) = 0$

Alors $f \circ g$ *admet un* $DL_n(0)$, $f \circ g(x) = R_n(x) + o(x^n)$ *où* R_n *est le reste de la division euclidienne de* $P_n \circ Q_n(X)$ *par* X^{n+1}.

Exemple 4 $h(x) = e^{\sin(x)}$,*déterminer le* $DL_3(0)$ *de* h

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad d'où :$$

$$h(x) = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3 + o(x^3) \quad soit :$$

$$\tan(x) = h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$