

DERIVATION

C. Susset

I désigne un intervalle de \mathbb{R} .

1 DERIVABILITE

1.1 Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur I à valeurs dans \mathbb{R} et $x_0 \in I$,

Définition 1 f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et appartient à \mathbb{R}

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Définition 2 f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 (on note $\mathbf{DL}_1(x_0)$) si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}, \forall h$ tq $x_0 + h \in I$ $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h)$

Proposition 1 f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un $\mathbf{DL}_1(x_0)$ et on a alors $f'(x_0) = A$ soit $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + o(h)$.

Définition 3 f est dérivable à droite en x_0 (resp. à gauche) si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$
(resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$)

On note : $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ (resp. : $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$)

Proposition 2 f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Définition 4 f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I , $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f'(x)$
est la fonction dérivée de f .

Proposition 3 Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

! la réciproque est fautive. $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

1.2 Interprétation géométrique

Tangente : Si f est dérivable en x_0 Alors la courbe représentative de f admet au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente qui a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Si f est dérivable en x_0 à droite (resp. à gauche), la courbe de f admet une demi-tangente de pente $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp \infty$, la courbe de f admet une tangente « verticale » au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$

1.3 Propriétés de la dérivée

1.3.1 Opérations :

Si f et g sont dérivables en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + g$, λf , $f \cdot g$ sont dérivables en x_0 , si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 .

$$\begin{aligned} - (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ - (\lambda \cdot f)'(x_0) &= \lambda \cdot f'(x_0) \\ - (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ - \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \end{aligned}$$

1.3.2 Composée :

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

1.3.3 Réciproque :

Si $f : I \rightarrow f(I)$ est continue, bijective et dérivable en x_0
Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2 THEOREMES

Proposition 4 Si f , dérivable en x_0 avec f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 , admet un extrémum local en x_0 Alors $f'(x_0) = 0$.

Cette proposition donne une condition nécessaire d'existence d'un extrémum dans le cas où f est définie à droite et à gauche de x_0 . L'étude de la fonction au voisinage de x_0 indiquera s'il s'agit bien d'un extrémum. Il est d'usage de préciser la proposition de la façon suivante :

Proposition 5 Soit f , dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0 . f admet un extrémum local en x_0 si et seulement si la dérivée s'annule en changeant de signe en x_0 .

Proposition 6 Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I .
 f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si sa dérivée est positive (resp. négative) ou nulle sur I

Remarque 1 Soit $A = \{x \in I, f'(x) = 0\}$, la croissance (resp. décroissance) dans la proposition précédente est stricte sur I si et seulement si A ne contient pas d'intervalle de longueur non-nulle.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$:

Théorème 1 (de Rolle)

Si

- f est définie et continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème 2 (des Accroissements Finis)

Si

- f est définie et continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$

Alors Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Théorème 3 (-Inégalités des accroissements finis)

Si

- f est définie et continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M$

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Théorème 4 (de prolongement)Si f est dérivable sur $]a, b[$ et f' admet une limite finie au point a Alors f se prolonge par continuité en a et le prolongement est dérivable avec $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ **3 DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR**

Si f est n fois dérivable sur l'intervalle I , $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n^e de f , $f^{(2)} = f'' = (f')'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition 5

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe \mathcal{C}^n sur l'intervalle I si et seulement si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I .
- f est de classe \mathcal{C}^0 sur I si et seulement si f est continue sur I .
- f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si et seulement si f est indéfiniment dérivable sur I .

Théorème 5

Si

- f est définie et continue sur $[a, b]$, de classe \mathcal{C}^p , $p \in \mathbb{N}^*$ sur $]a, b[$
- $f^{(p)}$ admet une limite finie en a

Alors

 f est de classe \mathcal{C}^p sur (a, b) .**propriétés :**

- Si f et g sont de classe \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$) sur I , $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$ (si $g \neq 0$) sont de classe \mathcal{C}^n sur I
- Si f est de classe \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$) sur I à valeurs dans J et g est de classe \mathcal{C}^n sur J
Alors $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^n sur I .
- Si f est bijective, de classe \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$) sur I à valeurs dans J et $f' \neq 0$ sur I
alors f^{-1} est de classe \mathcal{C}^n sur J .

Formule de Leibniz $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$.

Formule de Taylor avec reste intégral :

Soit f de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$ sur I , $\forall (a, b) \in I^2$, $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt$

Formule de Taylor avec reste de Lagrange :Soit f $(n+1)$ fois dérivable sur I , $\forall (a, b) \in I^2 \exists c \in]a, b[$, tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Inégalité de Taylor LagrangeSoit f $(n+1)$ fois dérivable sur I avec $\forall x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, on a :

$$\forall (a, b) \in I^2 \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \right| \leq M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

4 FONCTIONS CONVEXES

Définition 6 Soit f définie sur l'intervalle I , f est convexe sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1] \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Interprétation géométrique : f est convexe si et seulement si pour tout couple de points (M, N) de la courbe représentative de f la corde $[M, N]$ est au «*au dessus*» de l'arc (MN) de la courbe.

Définition 7 f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Proposition 7 Soit f convexe sur I , $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$

Proposition 8

- Soit f dérivable sur I : f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (la courbe de f est au dessus de chacune de ses tangentes).
- Si f est deux fois dérivable sur I : f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I .