Introduction à l'Analyse

Cours de Mathématiques

Deug SV & STU,
$1^{\text{ère}}$ année, 1^{er} semestre.

A. Monier

2001/2002

Table des matières

Chapitre 1

Des fonctions et leurs représentations graphiques

Il s'agit dans ce chapitre de reprendre contact avec des choses connues, les études de fonctions, en rappelant un certain nombre de résultats et de définitions sur les fonctions usuelles. Nous présentons ensuite des fonctions nouvelles, les fonctions hyperboliques, pour finir par une ouverture sur les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et leurs représentations graphiques.

1.1 Rappel sur les études de fonctions

Une fonction numérique d'une variable réelle est définie par la donnée de
- un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ (appelé ensemble de définition),
- une relation qui à tout élément de D associe un et un seul nombre réel.

Notation : pour une fonction f, on note :

$$\begin{array}{rccl} f : & D_f & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

$f(x)$ s'appelle l'image de x par f et x est un antécédent de $f(x)$.

Soit $\mathcal{R} = (O, x, y)$ un repère du plan. On appelle **courbe représentative** de f dans $\mathcal{R}$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ pour tout $x \in D$.

$$\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) \ / \ x \in D\}.$$

L'étude d'une fonction numérique consiste à décrire toutes les propriétés intéressantes de cette fonction et à dessiner sa courbe représentative. Cette étude suit la démarche suivante :
- recherche de l'ensemble de définition.
- Continuité et dérivabilité.
- Détermination d'un ensemble d'étude. Certaines propriétés telles que la parité et la périodicité permettent de réduire l'ensemble sur lequel on va étudier la fonction, les "parties manquantes" se déduisant à l'aide de transformations géométriques.
- Le sens de variation (croissante ou décroissante). Dans le cadre d'une fonction dérivable, cette étude revient à connaitre le signe de la dérivée de la fonction. On dresse alors le tableau de variation de la fonction.
- Le calcul des limites aux bords de l'ensemble de définition. Les éventuelles branches infinies (asymptotes, branches paraboliques...)
- La représentation graphique.

Remarque : Pour l'instant, les notions de limite, continuité et dérivabilité ne seront pas définies, il s'agit d'utiliser les définitions plus ou moins intuitives vues dans les classes antérieures (la continuité signifie que l'on ne décolle pas le crayon quand on dessine la courbe, et la dérivée que la courbe admet une tangente). Pour savoir si une fonction est continue ou dérivable, on se référera aux fonctions usuelles et au fait que ces propriétés sont conservées par la plupart des opérations (somme, différence, produit, quotient et composition). L'étude rigoureuse de ces notions fera l'objet des chapitres 3 et 4.

Petit rappel sur la composition. Soient f et g deux fonctions et A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbb{R}$. Il est alors possible de définir la fonction composée $g \circ f$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g \circ f : \quad & A \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

On prend d'abord l'image de x par f, comme f est à valeurs dans B, il est possible de prendre l'image de $f(x)$ par la fonction g. Exemples : $x \mapsto \ln(x+1)$ est la composée de $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto \ln x$. Remarque : en général $f \circ g \neq g \circ f$!

A savoir : la composée de deux fonctions continues, dérivables et une fonction continue et dérivable. De plus la dérivée est donnée par la formule :

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) f'(x).$$

1.1.1 Parité, périodicité.

Quelques définitions :

- f est paire si, pour tout $x \in D$, on a $-x \in D$ et $f(x) = f(-x)$.
- f est impaire si, pour tout $x \in D$, on a $-x \in D$ et $f(x) = -f(-x)$.
- f est périodique s'il existe un réel a, non nul, tel que, pour tout $x \in D$, $x + a \in D$, $x - a \in D$ et $f(x+a) = f(x)$. Le réel a est appelé une période de f. S'il existe une plus petite période strictement positive T, alors T s'appelle la période de f.

Ces propriétés ont des conséquences sur les propriétés géométriques de la courbe représentative de la fonction, à savoir

- si f est paire, alors $\mathcal{C}_f$ admet l'axe (O, y) comme axe de symétrie.
- Si f est impaire, alors $\mathcal{C}_f$ admet l'origine O comme centre de symétrie.
- Si f est périodique et $a \in \mathbb{R}^*$ une période, alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}(a, 0)$.

1.1.2 Monotonie

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est croissante sur I si et seulement si, pour tous réels a et b de I, la propriété $a < b$ implique $f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est décroissante sur I si et seulement si, pour tous réels a et b de I, la propriété $a < b$ implique $f(a) \geq f(b)$.

Propriétés :

1. f est croissante sur I si, pour tout couple $(a, b) \in I^2$, avec $a \neq b$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0.$$

   De plus, si f est dérivable sur l'intervalle I, f est croissante sur I si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur I si, pour tout couple $(a, b) \in I^2$, avec $a \neq b$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0.$$

   De plus, si f est dérivable sur l'intervalle I, f est décroissante sur I si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Tableau de variation. Une fois que l'on a déterminé le sens de variation d'une fonction, on regroupe ces informations dans un tableau de variation.

Exemple :

Soient α, β et γ trois réels, $\alpha < \gamma < \beta$. Une fonction f définie sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ est croissante sur un intervalle $]\alpha, \gamma[$ et décroissante sur $]\gamma, \beta[$, on a alors le tableau ci-contre.

x	α		γ		β
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\gamma)$	$\searrow$	

Extremum local, global. Quelques définitions :

- f admet un maximum global en x_0 si, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un minimum global en x_0 si, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J tel que $x_0 \in J$ et, pour tout $x \in I \cap J$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J tel que $x_0 \in J$ et, pour tout $x \in I \cap J$, on a $f(x) \geq f(x_0)$.
- Un minimum global ou un maximum global (resp. local) est appelé un extremum global (resp. local).

1.1.3 Branches infinies

L'étude des branches infinies intervient aux bornes de l'ensemble de définition. On parle de branche infinie quand la courbe possède une branche pour laquelle au moins une des deux coordonnées n'est pas bornée. Il existe donc principalement deux cas :
– soit il existe x_0 un réel tel que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty.$$

– Soit la fonction f est définie sur un intervalle $[A, +\infty[$ ou $]-\infty, A]$.
Soit f une fonction numérique ayant une branche infinie. On dit qu'un point de la courbe s'éloigne à l'infini si l'une de ces coordonnées tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. On appelle Γ la courbe représentative de f.

Définition 1.1.1 (Direction asymptotique) *On dit que la courbe Γ admet une direction asymptotique δ si la droite (OM), $M = (x, f(x))$ étant un point de la courbe, tend vers δ quand M s'éloigne à l'infini.*

Dans la pratique on étudie la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Cela permet d'avoir le coefficient directeur de la direction asymptotique.

Définition 1.1.2 (Asymptote) *On dit qu'une droite δ est asymptote à la courbe Γ si la distance des points de la courbe à δ tend vers 0 quand ils s'éloignent à l'infini. Il faut distinguer trois cas :*
– soit il existe x_0 un réel tel que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty.$$

Alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote **verticale** *à Γ.*
– soit il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l.$$

Alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote **horizontale** *à Γ (l'étude est la même quand $x \to -\infty$).*
– soit il existe a et b deux réels tels que

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Alors la courbe Γ admet une asymptote **oblique** *d'équation $y = ax + b$.*

Dans la pratique, les deux premiers cas sont les plus simples. Pour la dernière étude, le coefficient a est donné par la direction asymptotique, il suffit d'étudier la limite de $f(x) - ax$.

Définition 1.1.3 (Branche parabolique) *On dit que la courbe Γ admet une branche parabolique si elle admet une direction asymptotique et que la distance des points de la courbes à la direction asymptotique tend vers l'infini quand ils s'éloignent à l'infini.*

Dans la pratique, soit la direction asymptotique est verticale et x tend aussi vers $+$ ou $-\infty$ (exemple $x \to x^2$), soit la direction asymptotique à un coefficient directeur a et la limite de $f(x) - ax$ est infinie (exemple la racine carrée).

1.2 Fonctions usuelles

1.2.1 Les fonctions affines, $f(x) = ax + b$

Soient a et b deux réels. La fonction f définie par la relation $f(x) = ax + b$ s'appelle une fonction affine. Les fonctions affines sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, continues et dérivables, de dérivée : $f'(x) = a$. La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Ne nous attardons pas plus sur le sujet...

1.2.2 Le carré, $f(x) = x^2$

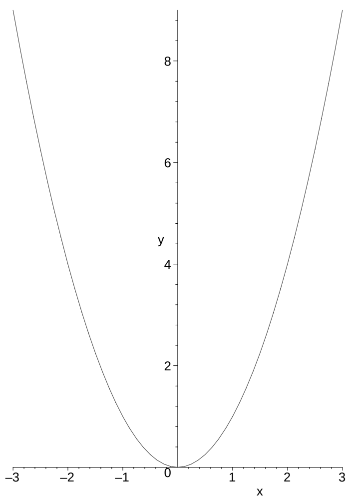
Le carré est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, continue et dérivable, de dérivée

$$f'(x) = 2x.$$

C'est une fonction paire.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
			$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	
	0		

La courbe représentative s'appelle une parabole.



Rappel : étude d'un trinôme. Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. La courbe représentative d'une telle fonction est aussi une parabole. Le signe de a donne le "sens" de la parabole (tête en bas si $a < 0$). Le calcul suivant permet de déduire assez facilement la courbe représentative :

$$g(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^4}{4a^2} + \frac{c}{a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$. Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $(-b/2a, -\Delta/4a)$. Cette écriture permet également de résoudre l'équation $g(x) = 0$.

- si $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$,
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

1.2.3 La racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$

f est définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$. C'est la réciproque de la restriction du carré à $\mathbb{R}_+$.

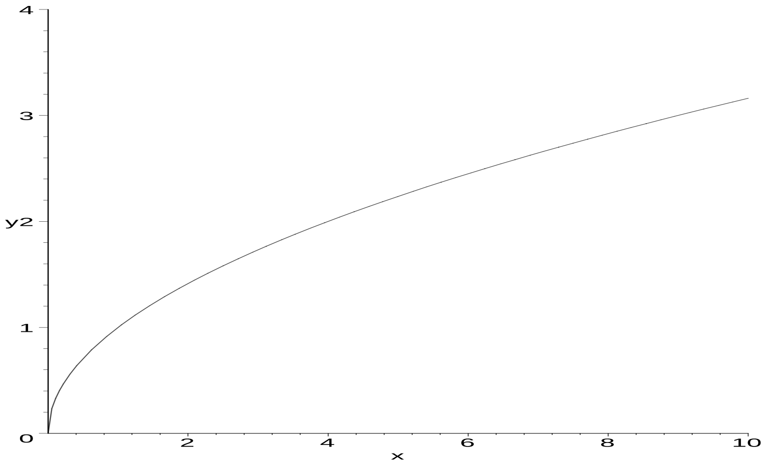
f est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est égale à, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0.$$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Branche infinie : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc la courbe admet pour direction asymptotique l'axe (O, x). Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on a une branche parabolique de direction (O, x).



1.2.4 La fonction inverse, $f(x) = 1/x$

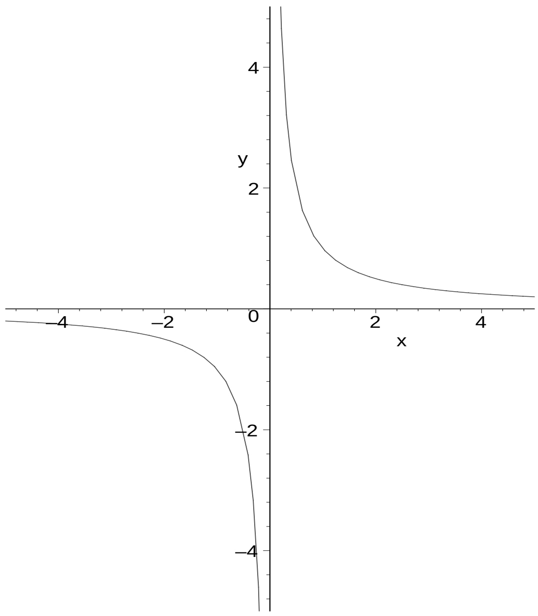
f est continue sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est égale à, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. La fonction est impaire.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

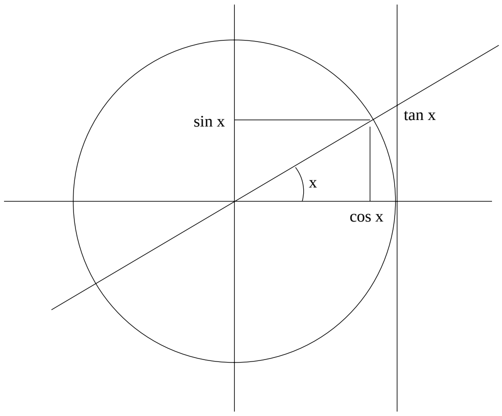
La courbe représentative de la fonction inverse s'appelle une hyperbole. L'hyperbole a deux asymptotes, une verticale, l'axe (O, y), et une horizontale, l'axe (O, x).



1.2.5 Les fonctions trigonométriques

Définitions

Les fonctions trigonométriques se définissent à l'aide du cercle trigonométrique :



On a le tableau de valeurs bien connu

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Pas définie

Le cosinus, $f(x) = \cos x$

f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à

$$f'(x) = -\sin x.$$

f est paire, périodique de période 2π.

x	0		$+\pi$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	+1	$\searrow$	-1

Le sinus, $g(x) = \sin x$

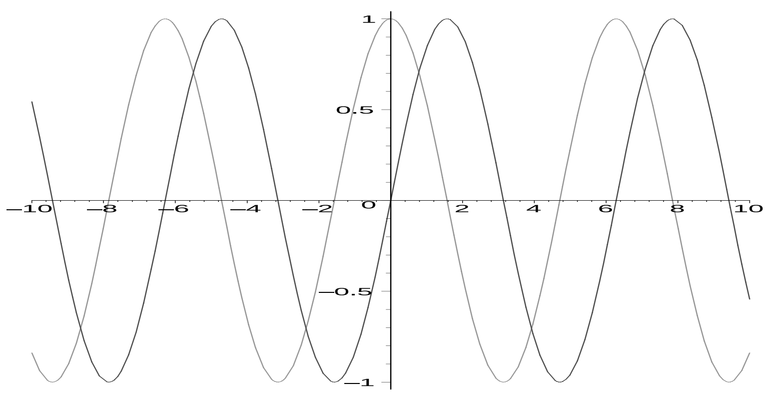
g est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à

$$g'(x) = \cos x.$$

g est impaire, périodique de période 2π.

x	0		$\pi/2$		$+\pi$
$g'(x)$	1	+	0	-	-1
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Les courbes représentatives du cosinus et du sinus s'appellent des sinusoïdales.



La tangente, $h(x) = \tan x$

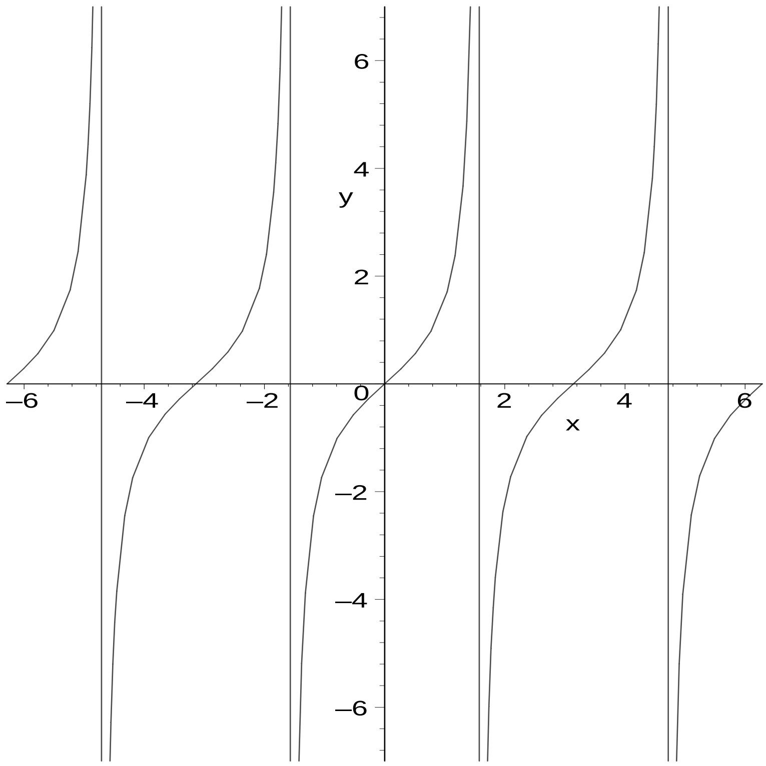
h est définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, continue et dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est égale à, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$h'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

x	0		$+\pi/2$
$h'(x)$	1	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f est impaire, périodique de période π.

Les droites d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont des asymptotes verticales à la courbe.



Formules de trigonométrie. Les principales formules à connaître, les autres s'en déduisent facilement.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

1.2.6 Le logarithme népérien, $f(x) = \ln(x)$

La fonction logarithme est définie comme étant la primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

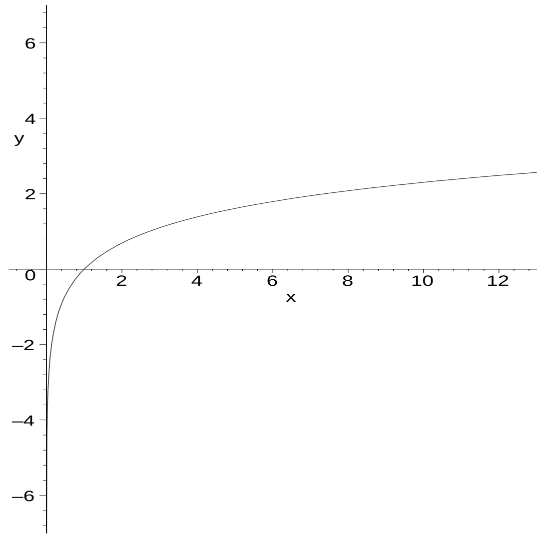
$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (par définition !) et sa dérivée est égale à, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



L'axe (O, y) est une asymptote verticale à la courbe et la courbe admet une branche parabolique de direction (O, x).

1.2.7 La fonction exponentielle, $f(x) = e^x$

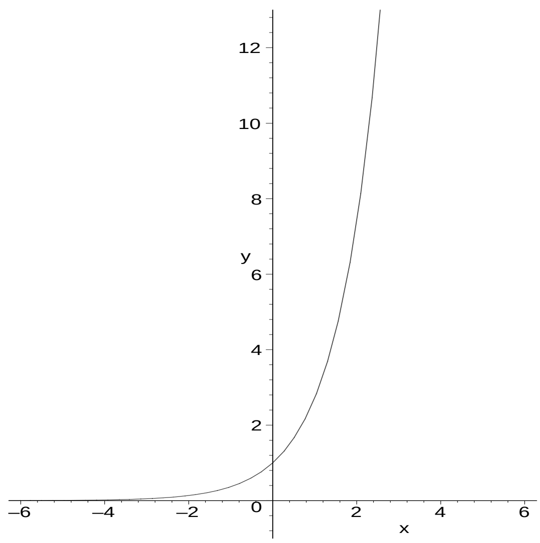
La fonction exponentielle est définie comme étant la réciproque de la fonction logarithme (qui est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$).
f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x = f(x) > 0.$$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

L'axe (O, x) est une asymptote horizontale à la courbe et la courbe admet une branche parabolique de direction (O, y).



Rappel : Les fonctions exponentielle et logarithme vérifient les deux formules suivantes :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \text{pour tout } a \text{ et } b,\ a > 0 \text{ et } b > 0.$$

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad \text{pour tout réels } a \text{ et } b.$$

1.2.8 Les fonctions puissances, $f(x) = x^\alpha$

Il est possible de définir grâce aux fonctions exponentielle et logarithme, les fonctions puissances, $f(x) = x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

L'étude générale de ces fonctions a déjà été plus ou moins vue à travers les trois cas particuliers du carré, de la racine carré et de la fonction inverse, qui donnent une bonne idée des 3 types de courbes que l'on trouve selon les valeurs de α (les trois cas sont $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$ et $\alpha > 1$).

1.3 Fonctions Hyperboliques

1.3.1 Définitions

On appelle cosinus hyperbolique la fonction notée ch définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On appelle sinus hyperbolique la fonction notée sh définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Enfin, on appelle tangente hyperbolique et l'on note th , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Rappel (pour la culture) : le lien avec les fonctions trigonométriques classiques est évidemment l'exponentielle complexe. On rappelle les formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

ce qui donne immédiatement

$$\operatorname{ch}(ix) = \cos x,$$

$$\operatorname{sh}(ix) = i \sin x,$$

$$\operatorname{th}(ix) = i \tan x.$$

1.3.2 Trigonométrie hyperbolique

D'après ce que l'on vient de dire, on peut tout de suite adapter un grand nombre de formules de trigonométrie aux fonctions hyperboliques. Nous ne citerons que les trois formules suivantes (faire le calcul) :

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x,$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x},$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Exercices : Calculer $\operatorname{ch}(2x)$ et $\operatorname{sh}(2x)$ en fonction de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.
Calculer $\operatorname{ch}(a+b)$, pour tout a et b appartenant à $\mathbb{R}$.

1.3.3 Etudes des fonctions

Les fonctions hyperboliques sont définies sur $\mathbb{R}$ entier. Comme la fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, les fonctions hyperboliques sont continues est dérivables sur $\mathbb{R}$. On a (faire le calcul)

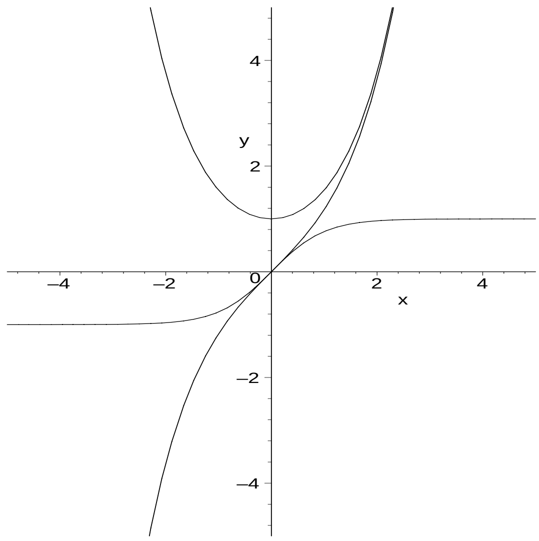
$$(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x,$$
$$(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x,$$

et

$$(\mathrm{th}\,x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x.$$

La fonction ch est paire et les fonctions sh et th sont impaires. La fonction th admet deux asymptotes horizontales, $y = 1$ (quand $x \to +\infty$) et $y = -1$ (quand $x \to -\infty$).

x	0		$+\infty$
$\mathrm{sh}\,(x)$		$+$	
$\mathrm{ch}\,(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$\mathrm{ch}\,(x)$		$+$	
$\mathrm{sh}\,(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$		$+$	
$\mathrm{th}\,(x)$	0	$\nearrow$	1



1.4 Introduction aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

1.4.1 Présentation

L'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ apparait naturellement si l'on veut décrire le déplacement d'un point dans le plan ou l'espace en fonction du temps (mouvement des planètes en fonction du temps, etc). Une fonction de la variable réelle à valeur dans $\mathbb{R}^2$ est définie par la donnée de

- un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ (appelé ensemble de définition),
- une relation qui à tout élément t de D associe un et un seul élément de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un couple $(x(t), y(t))$.

La définition est analogue dans $\mathbb{R}^3$.

Ces fonctions ne présentent donc pas de difficultés supplémentaires, il s'agit d'étudier conjointement plusieurs fonctions dont la variable est la même. La principale différence provient de leur représentation graphique. Dans le cadre d'une fonction numérique, nous avons mis en abscisse la variable et en ordonnée l'image de la fonction. Une telle représentation ici nécessiterait un repère à 3 dimensions. On se contente de dessiner la trajectoire du point, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{M(t) = (x(t), y(t)) \ / \ t \in D\}$$

On utilise alors plutôt l'appellation courbe paramétrée :

Définition 1.4.1 *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle courbe paramétrée définie de D à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ toute application $M : D \to \mathbb{R}^2$. Si $D = [a, b]$, $M(a)$, et $M(b)$ sont appelées les extrémités de la courbe , et $M(D)$ est l'ensemble des points de la courbe ou image.*

Remarque : $M(D)$ (*i.e.* l'image de l'application M) peut correspondre à plusieurs représentations paramétriques. En effet, si $M : I \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée. On peut faire le changement de variables $\varphi : \tilde{I} \to I$ si c'est une application bijective et considérer la nouvelle courbe paramétrée $\tilde{M} = M \circ \varphi$. Elle a la même image dans $\mathbb{R}^2$.

Exemples :
- les équations paramétriques des droites sont des courbes paramétrées (l'avantage comparé aux fonctions affines, c'est que l'on peut également obtenir des droites verticales).
- La courbe $M(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, a pour image le cercle trigonométrique.

L'étude d'une courbe paramétrée $M(t) = (f(t), g(t))$ consiste donc également à décrire les propriétés intéressantes des fonctions f et g et de dessiner l'image de M. Cette étude suit donc sensiblement les mêmes étapes :
1. Domaine de définition de f et g.
2. Continuité et dérivabilité des deux fonctions.
3. Périodicité, parité de f et g. On en déduit un intervalle d'étude commun.
4. Sens de variation de f et g. On ne fait qu'un tableau de variation où apparait les deux fonctions.
5. Points particuliers, points doubles.
6. Tangentes remarquables.
7. Branches infinies, asymptotes.
8. Le joli dessin.

On dit qu'une courbe paramétrée $M(t) = (f(t), g(t))$ est continue ou dérivable en un point t_0 si les fonction f et g sont continues ou dérivables en x_0.

Remarque : il est possible d'avoir des points doubles, ou même triple, etc. Il s'agit de points par lesquels la courbe passe à des valeurs différentes du paramétre, tels mes chers élèves qui chaque semaine viennent s'assoir à la même place dans l'amphi (le paramètre est le temps, à noter que vous n'avez pas forcément fait le même trajet pour venir). Un point peut donc avoir aussi plusieurs tangentes.

1.4.2 Les tangentes

Définition 1.4.2 *Soit $M : t \to M(t) \in \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $A = M(t_0)$. On dit que la courbe $\Gamma = M(I)$ admet une tangente en A si*
1. *$M(t) \neq M(t_0)$ dans un voisinage de t_0, pour $t \neq t_0$*
2. *La droite $AM(t)$ définie dans un voisinage de t_0, pour $t \neq t_0$, admet une position limite quand $t \to t_0$.*

Définition 1.4.3 *Le vecteur $\vec{M}'(t) = (f'(t), g'(t))$ s'appelle le vecteur vitesse au point $M(t)$ et $\vec{M}''(t) = (f''(t), g''(t))$ le vecteur accélération. Si $M'(t_0) = (0, 0)$, on dit que le point $M(t_0)$ est stationnaire.*

Théorème 1 *Si M est deux fois dérivable en t_0 et si $\vec{M}'(t_0) \neq \vec{0}$, Γ admet une tangente pour $t = t_0$, de vecteur directeur le vecteur vitesse. Si $\vec{M}'(t_0) = \vec{0}$, et $\vec{M}''(t_0) \neq \vec{0}$, alors la tangente a pour vecteur directeur le vecteur accélération.*

Remarques :
1. Le vecteur vitesse, quand il est non nul, définit une orientation de la tangente et un sens de parcours de la courbe.
2. Deux paramétrages d'une même courbe ne définissent pas forcément le même sens de parcours sur la courbe.

L'étude détaillée des points stationnaires n'est pas encore possible, les outils nécessaires seront développés plus tard dans le chapitre 5.

1.4.3 Branches infinies, asymptotes

L'étude des branches infinies est assez proche de l'étude pour une fonction numérique. Les définitions sont exactement les mêmes (direction asymptotique, asymptote, et branche parabolique).

La principale différence est dans la pratique : on étudie la limite $g(t)/f(t)$ quand t tend vers la valeur critique (c'est-à-dire celle pour laquelle une des deux coordonnées n'est pas bornée, nous la noterons t_0). Cela permet d'avoir une éventuelle direction asymptotique.
Si $\lim_{t \to t_0}(g(t)/f(t)) = a \in \mathbb{R}$, on étudie la limite de $g(t) - af(t)$ quand $t \to t_0$. Si le résultat est fini, on a une asymptote oblique, s'il est égale à plus ou moins l'infini, une branche parabolique.

Cette étude est donc aussi simple que dans le cadre des fonctions numériques.

1.4.4 Etude d'un exemple

Voir cours.

Chapitre 2

Fonctions polynomiales et rationnelles

Le but de ce chapite est de donner un exemple d'espace fonctionnel, les fonctions polynomiales, ou "polynômes". Il s'agit de montrer qu'une fonction (qui agit sur les réels) peut à son tour être considéré comme un objet sur lequel agissent des opérateurs.

2.1 Un espace fonctionnel : $\mathbb{R}[X]$

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1 *On appelle un monôme, une fonction de la forme* $x \mapsto ax^k$ *avec* k *un entier naturel et* a *un réel.*

Définition 2.1.2 *On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction polynomiale si elle peut s'écrire comme une somme finie de monômes* $a_p x^p$ *:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

Le plus grand entier n *tel que* $a_n \neq 0$ *s'appelle le degré de* f *(noté* $\deg(f)$*). Les réels* a_k*,* k *variant de* 0 *à* n*, sont les coefficients de la fonction polynomiale.*

Remarque : la fonction nulle est donc aussi une fonction polynomiale mais il n'est pas possible de définir son degré (certains donnent quand même une valeur, $-\infty$, de sorte que les propriétés que nous verrons plus loin soient toujours vraies).

Notation : la somme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ est aussi notée plus simplement à l'aide du symbole Σ :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Cela se lit : "la somme pour i variant de 0 à n des $a_i x^i$". i est un indice muet, on peut l'appeler également k ou Catherine, ce qui compte c'est qu'il prend toutes les valeurs de 0 à n.

Exemples de polynôme :
- La fonction $x \to x^2 + 4x + 5$ est une fonction polynomiale de degré 2.
- La fonction $x \to x^n$, $n \in \mathbb{N}$, est une fonction polynomiale de degré n.
- En particulier, les fonctions constantes non nulles sont des fonctions polynomiales de degré 0.

Nous utiliserons dans ce cours indifféremment les expressions de "fonction polynomiale" et de "polynôme". Il existe pourtant une nuance entre les deux, le polynôme étant un objet mathématique un peu plus abstrait (qui n'est pas spécialement une fonction). Nous ne nous attarderons pas plus sur cette distinction car aucune confusion ne pourra survenir dans ce cours.

Théorème 2 (fondamental) *Deux polynômes sont égaux si tous leurs coefficients sont égaux deux à deux. Soit P et Q deux polynômes de degré respectif n et m, définis pour tout $x \in \mathbb{R}$ par,*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,$$

et

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m.$$

Alors $P = Q$ implique $n = m$ et, pour tout $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ ..., n\}$, $a_k = b_k$.

Preuve : plus tard, et en cours.

Notations
– On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
– On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

2.1.2 Propriétés

Les polynômes étant vu comme des fonctions, on peut parfaitement définir des opérations (addition, produit, etc) sur $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 2.1.1 – *La somme de deux polynômes P et Q est un polynôme (noté $P+Q$). De plus, on a*

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)).$$

– *Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme (noté PQ). De plus, on a*

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \text{ si } P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0.$$

– *Le produit d'un polynôme P par un réel λ est un polynôme (noté λP). De plus, on a*

$$\deg(\lambda P) = \deg(P) \text{ si } P \neq 0 \text{ et } \lambda \neq 0.$$

Preuve : voir cours.

Remarque : toutes les propriétés des opérations citées précédemment sont identiques à celles bien connues sur les nombres réels, à savoir, la commutativité de l'addition et de la multiplication, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Attention ! Le quotient de deux fonctions polynomiales ne donnent pas en général un polynôme. On peut comparer l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ avec l'ensemble des entiers relatifs pour mieux comprendre la structure mathématique de l'ensemble des polynômes. En effet, la somme et le produit de deux entiers sont des entiers, mais le quotient de deux entiers n'est pas forcément un entier. Il est cependant possible de définir une division sur les entiers, la division euclidienne, qui à un quotient associe la partie entière et le reste (inférieur au dénominateur, souvenir...). C'est également le cas pour les polynômes.

Théorème 3 (Division euclidienne) *Soient P et D deux polynômes tels que* $\deg(P) \geq \deg(D)$. *On suppose que D n'est pas le polynôme nul. Alors il existe deux polynômes Q et R tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x).$$

De plus, si l'on impose $\deg(R) < \deg(Q)$, *les polynômes R et Q sont uniques. Q s'appelle alors le quotient de la division euclidienne de P par D, et R le reste.*

Dans la pratique, on "pose" la division exactement comme pour la division euclidienne des entiers, en cherchant à chaque étape à réduire le degré du polynôme de gauche en multipliant le polynôme D par un monôme convenable, jusqu'à ce que cela ne soit plus possible, c'est-à-dire quand le degré du reste est inférieur au degré de D. Voir exemple en cours et en TDs.

Définition 2.1.3 *On dit qu'un polynôme P est divisible par un polynôme D si le reste de la division euclidienne de P par D est le polynôme nul.*

Définition 2.1.4 *On dit qu'un polynôme P est irréductible s'il n'est divisible que par les polynômes constants et lui-même (c'est l'équivalent des nombres premiers pour la division euclidienne sur les entiers).*

La division euclidienne des polynômes est aussi appelée division selon les puissances décroissantes du fait qu'il est plus commode lors des calculs de ranger les polynômes selon les puissances décroissantes. C'est aussi parce qu'il existe une autre division sur l'ensemble $\mathbb{R}[X]$, la division selon les puissances croissantes !

Théorème 4 (Division selon les puissances croissantes) *Soient P et D deux polynômes, D n'étant pas le polynôme nul. Alors, pour tout entier k, on peut écrire de manière unique, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$P(x) = D(x)Q(x) + x^{k+1}T(x),$$

où Q et T sont deux polynômes tels que $\deg(Q) \leq k$.

On admet ce théorème. L'intérêt de cette nouvelle opération sera vu dans le chapitre 5.

2.1.3 Les racines d'un polynôme

Définition 2.1.5 *Un nombre réel a est une racine d'un polynôme P si $P(a) = 0$.*

Proposition 2.1.2 *Le nombre réel a est une racine du polynôme P si et seulement si P est divisible par le polynôme $x - a$.*

Preuve : en cours.

Définition 2.1.6 (Racine multiple) *Une racine a d'un polynôme P est une racine multiple, de multiplicité k, si et seulement si le polynôme P est divisible par le polynôme $(x - a)^k$.*

Proposition 2.1.3 *Tout polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines.*

Une conséquence de cette propriété est qu'un polynôme de degré au plus n qui admet $n+1$ racines est en fait le polynôme nul.

Pour la culture :

Théorème 5 (D'Alembert) *Tout polynôme à coefficients réels ou complexes de degré supérieur ou égale à 1 admet au moins une racine réelle ou complexe.*

Ce théorème permet de donner plusieurs résultats : l'intérêt des nombres complexes (dans le corps des complexes, on peut toujours trouver des racines), tout polynôme de degré $n > 0$ admet exactement n racines dans le corps des complexes, comptés avec leur ordre de multiplicité.

2.1.4 Les "fonctions" polynomiales

Les fonctions polynomiales sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ceux sont des fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. A noter que la dérivée d'une fonction polynomiale est aussi un polynôme, appelé "polynôme dérivé".

Soit P le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Son polynôme dérivé est le polynôme

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

(on dérive terme à terme dans la somme). On peut encore dériver ce polynôme, la dérivée seconde de P sera le polynôme

$$P''(x) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) a_i x^{i-2}.$$

On peut continuer ainsi jusqu'à

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)...2 \times 1 \times a_n = n! \times a_n$$

qui est une constante. Toutes les dérivées suivantes sont donc nulles. Les dérivées successives d'un polynôme permettent de caractériser les racines multiples.

Proposition 2.1.4 *Soit P un polynôme et a un nombre réel. a est une racine multiple de P, de multiplicité k si, pour tout i variant de 0 à $k-1$,*

$$P^{(i)}(a) = 0.$$

On a également le théorème suivant

Théorème 6 (Formule de Taylor) *Soit P un polynôme de degré n et soit a un réel donné. On a alors la formule de Taylor, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$P(x) = P(a) + \frac{(x-a)}{1!}P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}P''(a) + ... + \frac{(x-a)^k}{k!}P^{(k)}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}P^{(n)}(a).$$

Les démonstrations seront faites en cours.

2.2 Fonctions rationnelles

En poursuivant l'analogie entre l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ et les entiers relatifs, il peut être intéressant d'introduire les fonctions rationnelles, appelées aussi fractions rationnelles, tout comme on avait "agrandi" l'ensemble des entiers pour passer aux nombres rationnels.

Définition 2.2.1 *On appelle fonction rationnelle toute fonction qui peut s'écrire comme quotient de deux polynômes. Soit f une fonction rationnelle, alors il existe deux polynômes P et Q, $Q \neq 0$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $Q(x) \neq 0$, on a*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Cette écriture n'est pas unique.

Remarque : Une fonction rationnelle est donc définie sur l'ensemble $\mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} / \ Q(\alpha) = 0\}$ (c'est une réunion finie d'intervalles ouverts).

Proposition 2.2.1 *Les fonctions rationnelles sont des fonctions continues et dérivables sur leur ensemble de définition.*

Décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples. Soit f une fonction rationnelle, c'est-à-dire soient P et Q deux polynômes de degré respectif p et q. Si $p \geq q$, on commence par effectuer la division euclidienne de P par Q. :

$$P(x) = Q(x)E(x) + R(x) \quad \text{avec} \quad \deg(R) < q.$$

Ainsi, pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

E s'appelle la partie entière de f. Dans ce cours, nous nous contenterons de ce calcul. Cela permet d'avoir très facilement le comportement de la fonction f en $+$ ou $-\infty$.

On décompose le polynôme Q en produit de facteurs irréductibles (l'équivalent de la décomposition en facteur premier des entiers naturels), c'est-à-dire dans le cadre plus simple où le polynôme Q n'a que des racines réels :

$$Q(x) = \lambda(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_k)^{n_k}.$$

Les nombres a_i sont les racines de Q et les nombres n_i leur ordre de multiplicité. Ces résultats sont admis. Alors il est possible d'écrire la fonction rationnelle f sous la forme

$$f(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{s_j}{(x-a_i)^j},$$

où les s_j sont des constantes. Cette dernière écriture s'appelle la décomposition en éléments simples. Cela peut sembler peu ragoûtant, mais cette décomposition est très utile pour chercher la primitive d'une fonction rationnelle.

Chapitre 3

Limites et Continuité

3.1 Quelques notions de logique, notations

Avant de donner les définitions précises de limite et de continuité, il convient de faire une légère digression sur certaines notations très utiles et aussi parler un peu de logique.

En effet, les mathématiques sont la "science qui étudie par le moyen du raisonnement déductif les propriétés d'êtres abstraits (nombres, fonctions, ensembles, etc.) ainsi que les relations qui s'établissent entre eux" (définition du *Petit Larousse*). Quelques notions sur le raisonnement déductif ne peuvent donc pas faire de mal. D'ailleurs ce n'est pas tant la logique déductive, mais bien le fait de manipuler des objets abstraits qui pose problème dans l'enseignement des mathématiques. Et pourtant ... ces modèles abstraits, leur étude, ne sont-ils pas la finalité de toute démarche scientifique ?

3.1.1 Logique

Une **assertion** mathématique est une affirmation dont on peut dire sans ambiguité qu'elle est vraie ou qu'elle est fausse. Une assertion est constituée d'hypothèses (que l'on admet) et de la conclusion qui doit se déduire des hypothèses. Par exemple les phrases suivantes sont-elles des assertions :

- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 3 \geq 0$.
- Il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que $x^2 - 2x + 3 \geq 0$.
- Joyeux Noël !
- Je suis présentement en train de mentir.

Une assertion est souvent réduite à une **implication** ($P \Rightarrow Q$) entre deux énoncés. Une implication est vraie si lorsque P est vraie, Q est vraie. **Attention**, cela ne dépend pas de la véracité de la proposition P qui est admise ! Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, voici deux assertions

- L'implication ($n \geq 4 \Rightarrow n \geq 2$) est vraie.
- L'implication ($n \leq -4 \Rightarrow n \leq -2$) est aussi vraie, même si la propriété $n \leq -4$ est toujours fausse (car $n \in \mathbb{N}$).

Un raisonnement déductif consiste à déduire d'hypothèses admises un résultat grâce à une succession d'assertions ou d'implications dont on est sûr qu'elles sont vraies.

Equivalence. Soient P et Q deux énoncés. Si on a à la fois ($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$), on dit que P et Q sont équivalentes et on note ($P \Leftrightarrow Q$)

Et, ou. Il est évidemment possible de combiner des affirmations entre elles à l'aide des mots de liaison *et* et *ou*. Le *ou* logique se comporte exactement comme une réunion d'ensemble (notée $\cup$) et le *et* logique comme une intersection (notée $\cap$). Par exemple, si l'on considère les affirmations A, B et C suivantes :

A : Une porte est ouverte.
B : Une porte est fermée.
C : Une porte est bleue.
La propriété (A et B) est toujours fausse et la propriété (A ou B) est toujours vraie (on dit que c'est une tautologie, qui s'écrit avec "au" et non un "o", sinon on parle du célèbre Toto). Les affirmations A et B n'ayant pas de lien logique avec l'affirmation C, leur réunion ou leur intersection donc pas le même résultat : par exemple, un porte est ouverte ou bleue !

Négation ou contraire. Chaque propriété, ou affirmation, peut être niée. On note $non(P)$ ou encore $\neg P$ le contraire de P. Par exemple, on considère l'affirmation "il fait jour". Le contraire de P est l'affirmation "il ne fait pas jour", ou encore "il fait nuit". Noter qu'il s'agit d'un cas simple et que la négation d'une affirmation peut être bien plus compliquée ! En particulier, si l'on considère des énoncés plus complexes comme $(P \Rightarrow Q)$ ou encore $((P \text{ et } Q) \Rightarrow R)$, les choses se compliquent.
Il faut retenir les règles suivantes :
1 $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
2 $\neg(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q)$.
3 $\neg(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ et } \neg Q)$.
Exemple : la négation de "si l'élève a tout juste et si sa copie est bien rédigée, alors il a 20 sur 20" est "si l'élève n'a pas eu 20/20, c'est qu'il a fait des erreurs ou que sa copie est mal rédigée."

3.1.2 Quantificateurs

Les quantificateurs sont deux symboles très utilisés en mathématiques :
- $\exists$ se lit "Il existe".
- $\forall$ se lit "Pour tout" ou "Quel que soit".

Il ne s'agit que de notations, ce ne sont pas des symboles magiques.

Petit exercice : compter le nombre de fois qu'apparaissent les expressions "il existe" et "pour tout" dans le chapitre 1.

Ces quantificateurs sont très utiles car ils interviennent dans beaucoup de définitions en rapport avec les fonctions. Cela se comprend fort bien car dès qu'il s'agit de décrire certaines propriétés des fonctions, on est obligé de se ramener à ce que l'on connait, c'est-à-dire l'ensemble des réels. Par exemple, pour dire qu'une fonction f est positive, notion *a priori* réservée à des réels, on dit que toutes les images de cette fonction sont positives, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \geq 0.$$

Autre exercice : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Exprimer les énoncés suivants à l'aide de quantificateurs :
- La fonction f est nulle sur I.
- La fonction f s'annule sur I.
- La fonction f ne s'annule pas sur I.
- f n'est pas la fonction nulle sur I.
- La fonction f n'est pas de signe constant sur I.
- La fonction f est majorée sur I.

Quantificateurs et négation. Attention, les deux quantificateurs s'echangent quand on considère la négation d'un énoncé :
- La négation de la phrase "Il fait beau tous les jours" est "Parfois (c'est-à-dire il existe au moins un jour), il ne fait pas beau !".
- La négation de la phrase "L'OM a remporté au moins un match l'an dernier" donne "L'OM n'a gagné aucun match l'an dernier".

3.1.3 Un peu de méthode

Soit P et Q deux énoncés. Pour démontrer que $(P \Rightarrow Q)$ plusieurs raisonnements sont possibles :

1. Le raisonnement direct. De la propriété P, on arrive à déduire l'énoncé Q.
2. Le raisonnement par contraposée. Si $(P \Rightarrow Q)$, on appelle implication contraposée, l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Démontrer $(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à démontrer sa contraposée. Ainsi le raisonnement par contraposée consiste à démontrer l'implication contraposée de $(P \Rightarrow Q)$.
3. Le raisonnement par l'absurde. On prend comme hypothèse à la fois l'énoncé P et l'énoncé $\neg Q$. Il s'agit de montrer qu'une telle hypothèse est absurde. On en déduit également que $(P \Rightarrow Q)$.

La preuve par l'exemple. C'est exactement le genre de raisonnement qu'il n'est pas possible de faire en mathématiques, excepté pour fournir un contre-exemple. Regarder un résultat dans quelques cas particuliers ne permet pas de dire si ce résultat est toujours valable.

Prenons un exemple (je ne suis pas en contradiction avec ce que je viens de dire car il s'agit précisément de donner un contre-exemple) : le théorème bien connu de Pythagore. Si on dessine un triangle rectangle, et que l'on mesure ses côtés, on trouve par exemple 3, 4, et 5. Miracle, on a la relation $5^2 = 3^2 + 4^2$. Cela ne suffit pas pour dire que tous les triangles rectangles vérifient le théorème de Pythagore. Il faut considérer un triangle rectangle **quelconque**, c'est-à-dire que l'on se garde bien de donner une valeur numérique particulière aux côtés, et on cherche à montrer la relation pour ce cas général.

Cela montre bien l'importance de savoir faire un calcul littéral (c'est-à-dire avec des lettres), ce petit pas vers l'abstraction garantit une plus grande généralité du résultat. Ainsi, dès qu'il s'agira de démontrer un énoncé commençant par "pour tout" ($\forall$, quel que soit), le réflexe consiste à considérer un élément quelconque et de vérifier l'énoncé pour cet élément, sans jamais lui attribuer une valeur spécifique.

Contre-exemple. Le problème est effectivement différent quand il s'agit de montrer qu'un tel énoncé n'est pas vrai. Si l'énoncé est faux pour une valeur particulière c'est qu'il faux (voir la négation des quantificateurs). Donner un contre-exemple est donc une preuve acceptable pour montrer qu'un résultat est faux.

On peut maintenant commencer les choses sérieuses !

3.2 Limite d'une fonction en un point

3.2.1 Définitions

On introduit une nouvelle notion, celle de "voisinage" d'un point.

Définition 3.2.1 (Voisinage) – *Si a est un réel, on appelle voisinage de a toute partie V de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert centré en a, c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que $]a-h, a+h[\subset V$.*
– *Si $a = +\infty$, on appelle voisinage de $+\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]b, +\infty[$.*
– *Si $a = -\infty$, on appelle voisinage de $-\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]-\infty, b[$.*

Notation : dans tous les cas, on note $V(a)$ un voisinage de a.

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$, une partie de $\mathbb{R}$. On s'intéresse au comportement de la fonction quand la variable tend vers une valeur x_0 de $\mathcal{D}_f$ ou vers une borne de cet ensemble (on entend par borne d'un intervalle $]a, b[$, a ou b même si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$).

Définition 3.2.2 (Limite) *Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit $A \subset \mathcal{D}_f$ et soit $x_0 \in A$ ou une borne de A. On dit que la fonction f admet une limite l, l appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, au point x_0 par valeur dans A si et seulement si pour tout voisinage de l, $V(l)$, il existe un voisinage de x_0, $V(x_0)$, tel que, pour tout $x \in V(x_0) \cap A$, on a $f(x) \in V(l)$, c'est-à-dire avec les quantificateurs :*

$$\forall\ V(l),\ \exists\ V(x_0)\ \textit{tel que}\ \forall x \in V(x_0) \cap A,\ f(x) \in V(l).$$

On dit aussi que $f(x)$ "tend" vers l quand x "tend" vers x_0 par valeur dans A. Il est possible de préciser cette définition en se plaçant dans les différents cas particuliers :

1. x_0 est réel (c'est-à-dire différent de $-\infty$ ou $+\infty$)

a) La limite l est aussi finie. Alors f admet pour limite l en x_0 par valeur dans A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A,\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

b) $l = +\infty$. Alors f admet pour limite $+\infty$ en x_0 par valeur dans A si et seulement si

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A,\ f(x) > b.$$

c) $l = -\infty$. Alors f admet pour limite $-\infty$ en x_0 par valeur dans A si et seulement si

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A,\ f(x) < b.$$

2. $x_0 = +\infty$.

a) La limite l est finie. Alors f admet pour limite l en $+\infty$ par valeur dans A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in]c, +\infty[\cap A,\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

b) $l = +\infty$. Alors f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ par valeur dans A si et seulement si

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in]c, +\infty[\cap A,\ f(x) > b.$$

c) $l = -\infty$. Alors f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ par valeur dans A si et seulement si

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in]c, +\infty[\cap A,\ f(x) < b.$$

3. $x_0 = -\infty$.

α) La limite l est finie. Alors f admet pour limite l en $-\infty$ par valeur dans A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in]-\infty, c[\cap A,\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

b) $l = +\infty$. Alors f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ par valeur dans A si et seulement si

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \exists c \in \mathbb{R}. \text{ tel que } \forall x \in]-\infty, c[\cap A,\ f(x) > b.$$

c) $l = -\infty$. Alors f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ par valeur dans A si et seulement si

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in]-\infty, c[\cap A,\ f(x) < b.$$

L'idée est que la fonction prend des valeurs aussi proches que l'on veut de l (selon les cas cela donne : pour tout ε, sous entendu même pour ε très petit ; pour tout $b \in \mathbb{R}$, sous entendu même pour b très grand si $l = +\infty$, et même pour $-b$ très grand si $l = -\infty$), sur tout un voisinage de x_0, qu'il faut certes choisir convenablement, mais qui, par définition du voisinage, contient toujours un intervalle centré en x_0 non vide, ou de la forme $]c, +\infty[$ et $]-\infty, c[$ selon les cas.

Notation : Si une fonction f admet une limite l, l appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, au point x_0 par valeur dans A, on note

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = l.$$

Exemple : la fonction $f : x \mapsto 2x^2$ admet pour limite 0 au point 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$, pour que $|f(x)| < \varepsilon$, il suffit que $|x| < \sqrt{\varepsilon/2}$. Donc il existe $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Les suites : une suite u de nombres réels est, par définition, une application de $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note note habituellement $u_n = u(n)$ les éléments de la suite et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite. La limite d'une suite n'est qu'un cas particulier de la limite d'une fonction en $+\infty$. Ainsi, on a la définition suivante :

Définition 3.2.3 (Suite convergente) *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l, ou admet une limite l, $l \in \mathbb{R}$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

L'étude des suites est plus simple et cela permet de comprendre un peu mieux ce que signifie l'expression "tendre vers" : x tend vers x_0. u_n tend vers x_0 signifie que les termes successifs de la suite se rapproche de x_0...

Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit $A \subset \mathcal{D}_f$ et soit $x_0 \in A$ ou une borne de A. On dit que la fonction f admet une limite l, l appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, au point x_0 par valeur dans A si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Cette propriété est surtout intéressante pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

3.2.2 Quelques propriétés, opérations et limites

Proposition 3.2.1 *Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $A \subset I$ et soit $x_0 \in A$ ou une borne de A. Si f et g admettent pour limite respective a et b, a et b appartenant à $\mathbb{R}$, au point x_0 par valeur dans A, alors*
1. La fonction $f + g$ admet pour limite $a + b$ au point x_0 par valeur dans A.
2. Pour tout réel λ, λf admet pour limite λa au point x_0 par valeur dans A.
3. fg admet pour limite ab au point x_0 par valeur dans A.
4. Si $a \neq 0$, g/f admet pour limite b/a au point x_0 par valeur dans A.

Un certain nombre de résultats sont encore vrais quand les limites sont infinies. Pour mémoire, voici des tableaux permettant de voir pour chaque opération les cas particuliers. On note par un point d'interrogation les cas où l'on ne peut pas conclure. Les notations sont exactement les mêmes que dans la proposition que l'on vient d'énoncer.

La somme $f + g$ de deux fonctions vérifie

$g \diagdown f$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$b \in \mathbb{R}$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Le produit fg de deux fonctions vérifie

$g \diagdown f$	$a < 0$	$a > 0$	$a = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$b < 0$	ab	ab	0	$-\infty$	$+\infty$
$b > 0$	ab	ab	0	$+\infty$	$-\infty$
$b = 0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Le quotient g/f de deux fonctions vérifie

$g \diagdown f$	$a < 0$	$a > 0$	$a = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$b < 0$	b/a	b/a	?	$-\infty$	$+\infty$
$b > 0$	b/a	b/a	?	0	0
$b = 0$	0	0	?	0	0
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	?
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	?	?

La composition de deux fonctions vérifient

Proposition 3.2.2 *Soient $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $A \subset I$ et soit $x_0 \in A$ ou une borne de A. Soit $B = f(A)$ Alors, si f admet pour limite a au point x_0 par valeur dans A*

et g admet pour limite b au point a par valeur dans B, alors la fonction $g \circ f$ admet pour limite b au point x_0 par valeur dans A.

Enfin, n'oublions pas le fameux théorème dit "des gendarmes", même si l'image n'est guère agréable.

Proposition 3.2.3 (Encadrement) *Soient f, g et h des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $A \subset I$ et soit $x_0 \in A$ ou une borne de A. Si f et g admettent pour limite a, $a \in \mathbb{R}$, au point x_0 par valeur dans A, et si les fonctions f, g et h vérifient l'inégalité suivante*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall x \in I,$$

alors h admet aussi pour limite a au point x_0 par valeur dans A.

Démonstration en cours.

Exercice : donner un résultat analogue si $a = +\infty$.

3.2.3 Calculs de limite, limites usuelles

Cette petite partie est consacrée au cas où l'on ne peut pas conclure. En effet, dans un grand nombre de cas particulier, il existe des techniques simples pouvant lever l'indétermination. Nous étudierons surtout les quotients.

Premier cas. Le numérateur et le dénominateur ont une limite infinie.

Il suffit de mettre en facteur le terme prépondérent en facteur en haut et en bas. Ensuite, il faut connaître un certain nombre de limites usuelles qui sont rappelées dans le formulaire (comparaison de l'exponentiel et d'une puissance de x, de la fonction logarithme et d'une puissance de x).

En particulier, pour une fonction rationnelle, pour obtenir la limite en $+\infty$ ou $-\infty$, il suffit de faire le rapport des termes de plus haut degré.

Second cas. Le numérateur et le dénominateur ont une limite nulle.

Beaucoup d'étude de limite de ce genre peuvent être résolues en reconnaissant la limite d'un taux de variation. L'étude d'un exemple sera plus claire qu'un long discours.

On cherche la limite de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0. On sait que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivé est la fonction cosinus. Cela signifie que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'expression

$$\frac{\sin y - \sin x}{y - x}$$

admet une limite quand $x \to y$, et que cette limite vaut $\cos y$. En particulier pour $y = 0$, on retrouve

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = \cos 0 = 1.$$

Bien d'autres cas pourrait être étudié mais le temps presse.

3.3 Fonctions continues

3.3.1 Définitions

Définition 3.3.1 (Continuité) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction numérique définie sur I. On considère $x_0 \in I$. On dit que la fonction f est continue au point x_0 si f admet une limite l en x_0* **et** *$l = f(x)$.*
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

On peut préciser cette définition en explicitant la notion de limite introduite dans le chapitre précédent. Cela donne la proposition suivante

Proposition 3.3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction numérique définie sur I. On considère $x_0 \in I$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i *f est continue en x_0.*
ii *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.*
iii *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.*

Pour des exemples et une interprétation graphique de la notion de continuité, voir cours.

3.3.2 Propriétés

Un grand nombre de propriétés de la continuité découlent directement des propriétés des limites énoncés dans le partie précédente. Ainsi, on a la proposition suivante :

Proposition 3.3.2 *Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont continues en un point $x \in I$ (resp. continue sur I), alors*
1. La fonction $f + g$ est continue en x (resp. continue sur I).
2. Pour tout réel λ, λf est continue sur x (resp. continue sur I).
3. fg est continue en x (resp. continue sur I).
4. Si $f(x) \neq 0$, g/f est continue en x (resp. si f ne s'annule pas, g/f est continue sur I).

De même, la composition de deux fonctions vérifient

Proposition 3.3.3 *Soient $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors, si f est continue en x (resp. sur I) et g est continue en $f(x)$ (resp. sur J), la fonction $g \circ f$ est continue en x (resp. sur I).*

3.3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème qui suit est très important. Il montre en plus tout l'intérêt de la notion de continuité.

Théorème 7 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction de $I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient x_1 et x_2 deux points de I tels que $x_1 < x_2$. Alors pour tout y compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$, il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$ (on dit que f prend toutes les valeurs intérmédaires entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$).*

Démonstration en cours.

Ce théorème possède plusieurs corollaires intéressants (un corollaire est une conséquence immédiate d'un théorème) :

Corollaire 3.3.1 *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Le corollaire suivant est très utile pour trouver les zéros d'une fonction continue :

Corollaire 3.3.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient x_1 et x_2 deux réels de I, $x_1 < x_2$. Alors, si $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont de signes contraires, il existe un réel $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = 0$.*

Enfin, on admet le théorème suivant

Théorème 8 *Soit f une fonction de $I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle fermé $[a, b]$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors*
– $f([a, b]) = \{f(x) \ / \ x \in [a, b]\}$ est un intervalle fermé borné,
– Il existe $m \in [a, b]$ (resp. $M \in [a, b]$) tel que

$$f(m) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad (\textit{resp. } f(M) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

On dit que f atteint ses bornes sur $[a, b]$.

Continuité et monotonie

On rappelle qu'une fonction qui est soit croissante, soit décroissante est appelée une fonction monotone. Alors le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer le résultat suivant

Théorème 9 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction strictement monotone, continue sur* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Alors la fonction* f *réalise une bijection de* I *dans* $J = f(I)$*, c'est-à-dire que pour tout* $y \in J$*, il existe un et un seul* $x \in I$ *tel que* $f(x) = y$*.*

La notion de bijectivité et intéressante pour définir notamment la fonction réciproque d'une fonction...

Chapitre 4

Fonctions Dérivables

4.1 Généralités

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la fonction f est* **dérivable** *au point $x_0 \in I$ si la limite de*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe. Dans ce cas on appelle nombre dérivé de f en x_0 cette limite et on la note $f'(x_0)$.
On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle dérivable en tout point de I. On note f' la fonction $x \mapsto f'(x)$ et on l'appelle la fonction dérivée de f (ou dérivée).

Interprétation graphique : le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est exactement le coefficient directeur de la droite passant par les deux points de la courbe $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0+h, f(x_0+h))$ (que nous appellerons donc la sécante). On dit que f est dérivable au point x_0 si ces sécantes admettent une position limite, la tangente.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

est alors le coefficient directeur de la tangente et $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ son équation.

Remarque : il est possible d'adopter un autre point de vue. D'après la définition que l'on vient de donner, la dérivée d'une fonction donne le coefficient directeur de la tangente à la courbe. Une tangente est une droite, donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine. Ainsi, d'un point de vue moins géométrique mais plus en rapport avec les fonctions, une fonction est dérivable en un point x_0 s'il est possible de l'approcher par une fonction affine en ce point. L'avantage de ce point de vue, c'est que l'on peut le généraliser aux fonctions à plusieurs variables.

Exemples
- Une fonction constante est dérivable et sa dérivée est nulle.
- Une fonction affine est dérivable (voir remarque précédente).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à $x \mapsto nx^{n-1}$ (cela se démontre grâce à la formule du binôme de Newton, à faire en exercice).
- La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet

$$\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)} \overset{h\to 0}{\to} \frac{-1}{x^2}.$$

- Et encore bien d'autres fonctions usuelles (voir chapitre 1)...

4.1.2 Quelques propriétés

Proposition 4.1.1 *Soit f une fonction définie sur un voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Preuve : cours.

Remarque : attention, la réciproque est fausse ! Une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en un point a n'est pas forcément dérivable en a. Par exemple, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Il est important de savoir comment les différentes opérations (addition, produit, composition) sur les fonctions interagissent avec la dérivation.

Proposition 4.1.2 *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un intevalle ouvert I. Si f et g sont dérivables au point $x \in I$ (resp. dérivable sur l'intervalle I), alors*

- *La fonction $f+g$ est dérivable au point x (resp. dérivable sur I) et*
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$
- *Pour tout réel λ, la fonction λf est dérivable au point x (resp. dérivable sur I) et*
$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x).$$
- *La fonction produit fg est dérivable au point x (resp. dérivable sur I) et*
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$
- *Si $f(x) \neq 0$ (resp. f ne s'annule pas sur I), la fonction g/f est dérivable au point x (resp. dérivable sur I) et*
$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)}.$$

Démonstration en cours.

Proposition 4.1.3 *Soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to J$ deux fonctions numériques définies sur les intervalles respectifs J et I. Si g est dérivable au point x (resp. sur I) et f au point $g(x)$ (resp. sur J) alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable au point x (resp. sur I) et*

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Ce résultat assez général permet de retrouver un grand nombre de résultats connus, comme les dérivées de u^2, $1/u$, $\exp(u)$ ou encore $\sqrt{u}$.

4.2 Dérivées successives

A une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$, on associe sa fonction dérivée f'. Si la fonction f' est elle-même dérivable sur $]a, b[$, on peut également lui associer sa fonction dérivée $(f')'$, que l'on note plus simplement f''. f'' s'appelle la dérivée seconde de f. Plus généralement, on peut définir par récurrence sur $k \geq 0$, la dérivée k-ième de f, que l'on note $f^{(k)}$ (c'est-à-dire de proche en proche en appliquant la formule $f^{(p+1)} = (f^{(p)})'$ et en partant de $f^{(0)} = f$).

Définition 4.2.1 *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est k fois dérivable sur $]a, b[$ si $f^{(p)}$ existe pour tout p, $1 \leq p \leq k$. On dit que f est k fois continuement dérivable sur $]a, b[$, ou encore de classe $\mathcal{C}^k$, si f est k fois dérivable sur $]a, b[$ et que $f^{(k)}$ est continue sur $]a, b[$. Enfin, on dit que f est indéfiniment dérivable sur $]a, b[$, ou encore de classe $\mathcal{C}^\infty$, si f est k fois dérivable sur $]a, b[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Notations :
- on note $\mathcal{C}^k(]a,b[)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, c'est-à-dire les fonctions k fois continuement dérivable.
- On note $\mathcal{C}^\infty(]a,b[)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemples : un grand nombre des fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Les fonctions polynomiales sont dérivables et leurs dérivées sont aussi des polynômes, donc les polynômes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- On a le même résultat pour les fonctions rationnelles sur leur ensemble de définition.
- La fonction exponentielle est sa propre dérivée, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4.3 Théorème de Rolle et Théorème des accroissements finis

On rappelle que l'étude du signe d'une fonction dérivée permet d'obtenir le sens de variation. Les résultats qui vont suivre permettent de le démontrer.

On rappelle la définition d'un extremum local (en utilisant la notion de voisinage cette fois) :
- une fonction f admet un maximum local en x_0 s'il existe un voisinage de x_0, $V(x_0)$, tel que pour tout $x \in I \cap V(x_0)$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
- une fonction f admet un minimum local en x_0 s'il existe un voisinage de x_0, $V(x_0)$, tel que pour tout $x \in I \cap V(x_0)$, on a $f(x) \geq f(x_0)$.

On a la proposition suivante

Proposition 4.3.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0. Alors, si f dmet un extremum local en x_0, $f'(x_0) = 0$.*

La réciproque est fausse, ce n'est parce que la dérivée s'annule en un point que la fonction admet un extremum local en ce point (exemple $x \mapsto x^3$).

Théorème 10 (Rolle) *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve : en cours.

Remarque : comme dans tout théorème, toutes les hypothèses sont indispensables ! Par exemple, si l'on considère la fonction $x \mapsto |x|$ sur l'intervalle $[a,b] = [-1,1]$, on a presque toutes les hypothèses sauf la dérivabilité en 0, le résultat est effectivement faux.

Le théorème de Rolle montre que si $f(a) = f(b)$ et que la fonction est assez régulière alors il existe un tangente horizontale. Le théorème qui suit généralise ce résultat :

Théorème 11 (Accroissement finis) *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque : il s'agit effectivement d'une généralisation, le théorème donne l'existence d'une tangente parallèle à la sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Si $f(a) = f(b)$, cette sécante est bien horizontale.

Preuve : comme d'habitude...

Application : le théorème des accroissements finis permet de démontrer qu'une fonction dérivable est croissante si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle. A faire en exercice, si le manque de temps ne nous permet de le faire en cours.

On peut également énoncer la théorème suivant

Théorème 12 *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que, pour tout $x \in]a,b[$,*

$$f'(x) > 0.$$

Alors f réalise une bijection de $[a,b]$ dans $[f(a),f(b)]$, c'est-à-dire que pour tout $y \in [f(a),f(b)]$, il existe un unique $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

Chapitre 5

Développement limité, Applications

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la dérivabilité peut être vu comme le fait d'approcher une fonction en un point par une fonction affine. Cette notion, identique pour les fonctions numériques à la dérivabilité, s'appelle en fait la différentiabilité. Ainsi une fonction f est dérivable au point x s'il existe un voisinage $V(x)$ de x une fonction φ telle que $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$, pour laquelle, pour tout h, $x+h \in V(x)$,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\varphi(h).$$

Un "développement limité" est en quelque sorte une généralisation de la différentiabilité, on cherche à approcher f par une fonction polynôme.

5.1 Formule de Taylor

La formule de Taylor, que nous avons déjà vue pour les polynômes, est une généralisation du Théorème des accroissements finis :

Théorème 13 (Formule de Taylor) *Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $[a, b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que f est $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors, pour tout $x \in]a, b[$, pour tout $y \in]a, b[$, il existe $c \in [x; y]$ tel que*

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \ \dots\ + \frac{(y-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) + \ \dots\ + \frac{(y-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Pour $n = 0$, on retrouve exactement le Théorème des accroissements finis (TAF). Il s'agit donc bien d'une généralisation. Nous verrons en cours que la démonstration de ce Théorème est très proche de la démonstration du TAF.

Remarque : on note souvent $h = y - x$, la formule de Taylor s'écrit alors

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ \dots\ + \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x) + \ \dots\ + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h),$$

où $\theta \in [0, 1]$ et dépend de x et h (on a exactement $\theta = (c-x)/h$). On a donc écrit que, pour x fixé, $f(x+h) = P_n(h) + R_n(h)$ où P_n est un polynôme en h de degré n et

$$R_n(h) = \frac{(h)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Ainsi la formule de Taylor permet d'approcher une fonction par un polynôme de degré n, avec la précision $R_n(h)$. A noter que quand $h \to 0$, $R_n(h)$ est effectivement "très petit"...

La notion de développement limité consiste à approcher une fonction par un polynôme au voisinage d'un point avec un reste suffisament petit. Il convient donc de définir ce que signifie "petit"...

5.2 Développement limité

La première remarque importante concernant les développements limités est que l'on cherche toujours à se ramener à une étude au voisinage de 0. Pour une étude en un point $a \in \mathbb{R}$, on prend la variable $x - a$; pour une étude en + ou $-\infty$ on prend la variable $X = 1/x$. Les définitions qui vont suivre seront donc données sur des voisinages de 0.

5.2.1 Fonctions équivalentes

Infiniment petit

On dit qu'une fonction f est un **infiniment petit** au voisinage de 0 si la limite de f en 0 existe et vaut 0, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Exemples : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sin x$, ou encore $x \mapsto x \ln x$.

Notations : une telle fonction est souvent notée ε, $x \mapsto \varepsilon(x)$, ou encore on dit que cette fonction est un petit "o" de 1, noté $o(1)$... Attention cette notation est ambigüe car $o(1)$ est une fonction et non une constante. Cela signifie que cette fonction est "petite" devant les constantes.

Infiniment grand

On dit qu'une fonction f est un **infiniment grand** au voisinage de 0 si la limite de f en 0 existe et vaut + ou $-\infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to 0} f(x) = + \text{ ou } -\infty.$$

Exemples : $x \mapsto e^{1/x^2}$, $x \mapsto \ln x$, et bien-sûr $x \mapsto 1/x$.

Fonctions équivalentes

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de l'origine. On dit que f est équivalente à g s'il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)).$$

Notations : là encore, plusieurs notations sont possibles. Soit on dit que $f \overset{0}{\sim} g$, soit on écrit $f = g + o(g)$. La notation $o(g)$ signifie que cette fonction est petite devant g, c'est-à-dire que le rapport (ici, la foncion ε) tend vers 0 en 0 si ce rapport existe bien-sûr...

Exemples : $\sin x \overset{0}{\sim} x$, $\ln(1 + x) \overset{0}{\sim} x$.

Cette notion d'équivalence permet de comparer des infiniments petits avec des puissances de x. Ainsi, on dit qu'une fonction f est d'ordre n par rapport à l'infiniment petit x si $f(x) \overset{0}{\sim} ax^n$.

Si la définition de l'équivalence implique que l'on peut faire un certain nombre d'opérations (produit, quotient s'ils sont définis, etc) il faut faire attention, on ne peut pas tout faire. En particulier la composition est très délicate à manipuler. Exemple : $1 \overset{0}{\sim} 1 + x$ mais $0 = \ln 1$ n'est pas équivalent à $\ln(1 + x)$.

5.2.2 Définition d'un développement limité

Soit f une fonction définie au voisinage de l'origine $V(0)$ (éventuellement f peut ne pas être définie en 0). On dit que f admet un développement limité (souvent appelé DL) à l'ordre n sur $V(0)$ s'il existe un polynôme P_n de degré au plus n et une fonction ε telle que $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ pour lesquels on a

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x).$$

On appelle P_n la partie régulière et $x \mapsto x^n\varepsilon(x)$ le reste.

Remarque : on peut également noter le reste $o(x^n)$ d'après le paragraphe précédent. L'ordre correspond à la puissance de x dans le terme $o(x^n)$.

Attention, f n'est pas forcément définie en 0, mais si elle admet un DL en 0, elle admet une limite en 0. Par exemple la fonction $x \to \dfrac{\sin x}{x}$ admet un DL à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on verra ça plus loin).

Exemples de DL

Tout polynôme admet un DL en 0 à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette remarque évidente découle directement de la définition des DL.

En fait toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un voisinage de 0 ou dérivable $n+1$ fois et telle que $f^{(n+1)}$ est bornée sur un voisinage de 0, admet un DL en 0 à l'ordre n. Il suffit pour cela d'utiliser la formule de Taylor démontrée dans la première partie : le reste (que l'on avait écrit par rapport à la variable h) est un $o(h^n)$. En effet

$$|R_n(h)| = \left|\frac{(h)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h)\right| \le h^n\left(\frac{Mh}{(n+1)!}\right),$$

où M majore en valeur absolue $f^{(n+1)}(x+\theta h)$ (au voisinage de 0, il faut prendre $x = 0$). Ainsi

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{Mh}{(n+1)!}\right) = 0.$$

On peut donc déjà calculer grâce à cette formule un certain nombre de DL :

- La fonction exponentielle est $\mathcal{C}^\infty$ donc elle admet un DL à tout ordre. De plus, cette fonction est sa propre dérivée, et $e^0 = 1$, donc on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ \dots\ + \frac{x^k}{k!} + \ \dots\ + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

- On s'intéresse à la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Les dérivées successives de g sont assez facile à calculer :

$$g^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

  On en déduit que cette fonction admet un développement limité en 0 à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ \dots\ + x^k + \ \dots\ + x^n + o(x^n).$$

- Un dernier exemple en exercice $x \mapsto e^{1/x^2}$. Cet exemple est intéressant car la partie régulière est nulle à tout ordre.

La formule de Taylor peut servir à trouver beaucoup d'autres DL, comme les fonctions sinus et cosinus dont les dérivées successives sont faciles à calculer. Les deux premiers exemples sont les deux DL les plus importants à connaître. Nous allons voir que l'on peut faire un certain nombre d'opérations sur les DL, ainsi, si l'on connait quelques développements limités, on pourra en trouver beaucoup d'autres...

Le développement de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ peut être vu d'une autre manière : on a déjà vu la formule suivante

$$(1 + x + x^2 + \ \dots \ + x^k + \ \dots \ + x^n)(1-x) = 1 - x^{n+1},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ \dots \ + x^k + \ \dots \ + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Le terme $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ est bien un $o(x^n)$...

A noter que l'on retrouve le même développement, en effet il y a unicité du DL :

Proposition 5.2.1 (Unicité) *soit f une fonction définie sur un voisinage de 0. Alors si f admet un DL à l'ordre n en 0, ce développement est unique.*

Démonstration en cours.

Enfin le résultat suivant découle de l'unicité et permet d'éviter beaucoup de calculs.

Proposition 5.2.2 (Parité et DL) *Une fonction paire qui admet un DL en 0 d'ordre n ne présente que des puissances paires dans ce développement. De même, le DL en 0 d'une fonction impaire n'a que des puissances impaires.*

Démonstration laissée en exercice.

5.2.3 Opérations sur les DL

Les opérations sur les DL sont assez faciles car il s'agit réellement d'une égalité, et non d'une approximation. Certes la partie régulière donne une approximation de la fonction au voisinage de 0 mais le fait d'écrire le reste $x^n\varepsilon(x)$ permet d'avoir une égalité, ce qui est plus agréable à manipuler.

On considère donc deux fonctions f et g qui admettent un DL en 0 d'ordre respectif n et m. Donc il existe un voisinage de 0 tel que, pour tout $x \in V(0)$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots \ + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ \dots \ + b_m x^m + x^m \varepsilon(x),$$

Somme

La fonction $f+g$ admet un DL en 0 d'ordre le plus petit des ordres n et m. Si $n \leq m$, on a $f+g$ qui admet un DL en 0 d'ordre n et

$$(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ \dots \ + (a_n + b_n)x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Exemple : On se propose de calculer le DL de la fonction cosinus en utilisant la formule d'Euler. Ceci pose certes un petit problème théorique car nous allons donc utiliser l'exponentielle complexe comme une fonction définie sur $\mathbb{C}$ dont le DL en 0 est le même que la fonction exponentielle usuelle définie sur $\mathbb{R}$. Bref, on rappelle la formule suivante

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

or, on a

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \ ... \ + \frac{X^k}{k!} + \ ... \ + \frac{X^n}{n!} + o(X^n).$$

Donc

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \ ... \ + \frac{(ix)^k}{k!} + \ ... \ + \frac{(ix)^n}{n!} + o(x^n),$$

et

$$e^{-ix} = 1 - ix + \frac{(-ix)^2}{2} + \ ... \ + \frac{(-ix)^k}{k!} + \ ... \ + \frac{(-ix)^n}{n!} + o(x^n).$$

Quand on fait la somme, tous les termes d'ordre impaires disparaissent car il apparaît à chaque fois, après factorisation, l'expression $(1 + (-1)^n)/2$. Il ne reste donc que des termes pairs, or

$$\frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} = (-1)^k \frac{(x)^{2k}}{(2k)!}.$$

Le DL de la fonction cosinus est donc le suivant

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ ... \ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

On pourrait faire le même travail pour calculer le DL en 0 du sinus, et du cosinus et sinus hyperboliques. Le calcul pour le sinus donne

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ ... \ + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

On remarque que les développements cités ne contiennent que des termes d'ordre pair ou impair selon le cas, ce que l'on savait déjà grâce à la proposition précédente. De plus, pour la fonction cosinus, le terme d'ordre $2n+1$ est nul (impair) donc même si le dernier terme de la partie régulière est d'ordre $2n$, le DL obtenu est d'ordre $2n+1$. On a le même phénomène pour le sinus.

Produit

La fonction fg admet un DL à l'ordre au moins n (on suppose encore $n \leq m$) et on a, pour tout $x \in V(0)$,

$$(fg)(x) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \ ... \ c_k x^k + \ ... \ + c_n x^n + o(x^n),$$

où le coefficient c_k est donnée par la formule suivante (déjà vu quand nous avons fait le produit de deux polynômes) :

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k}} a_i b_j.$$

Cette formule n'est pas à connaître, il faut juste retenir que l'on regroupe ensemble les termes de même puissance. Dans un produit, tous les termes de puissance 5, par exemple, sont obtenus en faisant le produit de termes de puissance i et j qui vérifient $i + j = 5$ ($a_i x^i \times b_j x^j = a_i b_j x^{i+j}$).

De manière générale, il faut toujours "mener" un calcul de DL de la sorte : il faut regrouper les termes de même degré ensemble, en allant du plus petit au plus grand, les termes d'ordre supérieurs n'apparaissent même pas, ils sont mis dans le reste.

Exemple : calculons le DL du produit suivant $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$. On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ ... \ + x^n + x^n\varepsilon(x),$$

et
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ \dots\ + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x).$$
Donc le produit :
$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = 1 + (1-1)x + (1-1+1)x^2 + (1-1+1-1)x^3 + \ \dots\ + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^n + x^n\varepsilon(x),$$
ce qui donne finalement
$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = 1 + x^2 + x^4 \ \dots\ + x^{2p} + x^{2p}\varepsilon(x).$$
On retrouve ce résultat en substituant directement x par x^2 dans le DL de $1/(1-x)$.

Quotient

Si $g(0) \neq 0$, le quotient f/g admet un DL à l'ordre n. La partie régulière de ce développement est obtenue en effectuant la division selon les puissances croissantes de la partie régulière de f par la partie régulière de g à l'ordre n.

On rappelle le principe de la division selon les puissances croissantes :

Théorème 14 (Division selon les puissances croissantes) *Soient P et D deux polynômes, D n'étant pas le polynôme nul et $D(0) \neq 0$. Alors, pour tout entier k, on peut écrire de manière unique, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$P(x) = D(x)Q(x) + x^{k+1}T(x),$$
où Q et T sont deux polynômes tels que $\deg(Q) \leq k$.

D'après ce théorème, si P et D représentent les parties régulières de f et g, le polynôme Q approche bien le quotient f/g et $\dfrac{x^{n+1}T(x)}{D(x)}$ est bien un infiniment petit d'ordre n.

Exemple : la fonction tangente est définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. $\cos 0 = 1 \neq 0$, donc la fonction tangente admet un DL à l'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose la division selon les puissances croissantes (on calcul juste les premiers termes) :

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\
\hline
x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
\qquad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & \\
\qquad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{72}x^7 & \\
\qquad\qquad \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{72}x^7 & \\
\qquad\qquad \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{15}x^7 + o(x^7) & \\
\qquad\qquad\quad o(x^6) &
\end{array}$$

Le développement limité de la fonction tangente est donc
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

Remarque : on peut également faire des quotients avec $g(0) = 0$. En effet, si $f(0) = 0$, il peut y avoir des simplifications. Il faut en fait que la valuation (la puissance du terme de plus bas degré) de la partie régulière du dénominateur soit inférieure ou égale à la valuation de la partie régulière du numérateur (belle phrase, n'est-ce pas ?). Par exemple $x^2/x = x$, c'est pas bien dur finalement... Ainsi la fonction $\sin x/x$ admet un DL en 0 :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^5).$$

A noter que dans ce cas, on perd de l'ordre sur le DL.

Composée

On suppose cette fois que $g(0) = b_0 = 0$, histoire de se ramener effectivement à un DL en 0. Alors la fonction composée $f \circ g$ admet un DL à l'ordre n et le DL s'obtient en remplaçant directement $g(x)$ par sa partie régulière dans le DL de f et on regroupe les termes de même puissance :

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= a_0 + a_1 g(x) + a_2 (g(x))^2 + \ \ldots \ + a_n (g(x))^n + o(x^n) \\ &= a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 + \ldots . b_n x^n) + a_2 (b_1 x + b_2 x^2 + \ldots . b_n x^n)^2 + \\ &\qquad \ldots + a_n (b_1 x + b_2 x^2 + \ldots . b_n x^n)^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Attention, dans le pratique, ces calculs font apparaître un grand nombre de terme d'ordre trop élevé. C'est pourquoi, il ne faut développer machinalement les puissances, mais faire comme nous l'avons dit précédemment, calculer directement les coefficients des puissances et renvoyer les termes d'ordre trop grand dans le reste (sans les écrire).

Exemples : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. C'est un cas facile car il ne s'agit pas vraiment de la composée deux DL car $g(x) = -x^2$. La formule est exacte, donc il s'agit juste d'une substitution :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ \ldots \ + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

On prend un autre exemple : $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$. La fonction cosinus admet un DL à l'ordre 5 :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5))} \\ &= 1 + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + o(x^5) \end{aligned}$$

On s'arrète à l'ordre 2 car tous les termes suivants font apparaître des puissances supérieures à 6.

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{24}\right)}_{=5/24} x^4 + o(x^5).$$

Ce résultat peut permettre de retrouver le DL de la tangente.

Primitive

Une primitive de f, notée F admet un DL à l'ordre $n+1$ et on peut intégrer terme à terme dans le DL :

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ \ldots \ + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Remarque : il y a un petit miracle car on gagne un ordre dans le DL. Cela peut permettre de calculer un DL de la fonction tangente à l'ordre 3, si on en connaît un à l'ordre 1. En effet

$$(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$$

Don un DL à l'ordre 1 donne un DL à l'ordre 2 de la dérivée. En prenant la primitive, on trouve un DL à l'ordre 3 !

Exemple : $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Cet exemple est très important. Cette fonction est dérivable et sa dérivée vaut $x \mapsto 1/(1+x)$. Cette fonction est donc une primitive de $x \mapsto 1/(1+x)$. On a donc

$$\ln(1+x) = f(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ \dots\ + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Dérivée

La dérivée de f admet un DL à $n-1$ (cette fois on perd en précision) et on peut dériver terme à terme :

$$f'(x) = a_1 + a_2(2x) + \ \dots\ + a_n(nx^{n-1}) + x^{n-1}\varepsilon(x).$$

Exemple : on peut retrouver le DL de Cosinus en utilisant le DL du Sinus... en exercice !

5.2.4 DL usuels

Nous avons donc établi un certain nombre de DL pour les fonctions usuels. Les principaux à retenir sont les DL qui suivent

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ \dots\ + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ \dots\ + x^n + x^n\varepsilon(x)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \ \dots\ + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \ \dots\ + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ \dots\ + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$
- $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)$

5.3 Applications

Les développements limités pemettent de décrire le comportement d'une fonction au voisinage d'un point. c'est donc un outil indispnsable pour l'étude locale des fonctions.

5.3.1 Calcul de limites

La première application des développements limités est la calcul de limites. Il s'agit juste de reprendre l'idée développée au chapitre 3, concernant les cas d'indétermination. Prenons un exemple, on cherche à calculer la limite de la fonction $x \mapsto (\cos x)^{1/x^2}$ quand $x \to 0$.

On connait le DL de la fonction cos au voisinage de 0 et le DL de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

et

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

On a

$$(\cos x)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right).$$

Grâce deux développements cités précédemment on peut calculer un DL de $x \mapsto \ln(\cos x)$ en 0 :

$$\ln(\cos x) = \underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}}_{=u} - \underbrace{\frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!})^2}{2}}_{=\frac{u^2}{2}} + o(x^4),$$

ce qui donne quand on ne grade que les termes d'ordre inférieur à 4 :

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Ainsi, on a

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on peut donc passer à la limite dans cette expression, ce qui donne

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}.$$

5.3.2 Développement asymptotique

En faisant le changement de variable $X = 1/x$, l'étude des branches infinies d'une fonction numérique peut se ramener à l'étude d'un développement limité en 0. Encore une fois, étudions un exemple, car il n'y a pas de résultat théorique précis sur ce sujet.

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et on s'intéresse à son comportement en $+\infty$. On pose donc $X = 1/x$; on a donc

$$f(x) = g(X) = \exp\left(\frac{\ln(1+X)}{X}\right).$$

On a donc

$$g(x) = \exp\left(1 - \frac{X}{2} + o(X)\right) = e \times \exp\left(-\frac{X}{2} + o(X)\right) = e\left(1 - \frac{X}{2} + o(X)\right).$$

On a donc pour f :

$$f(x) = e - \frac{e}{2x} + o(1/x).$$

Ainsi f admet une asymptote horizontale d'équation $y = e$ et la courbe se trouve en dessous de l'asymptote.

5.3.3 Etude d'un point stationnaire

On va enfin pouvoir terminer l'étude des courbes paramétrées. On considère une courbe paramétrée Γ :

$$\begin{aligned} M : \quad & I \to \mathbb{R}^2 \\ & t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. On étudie le comportement de la courbe en 0 (par translation, on peut toujours se ramener à 0). On suppose que les fonctions x et y admettent un DL en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, il suffit de supposer que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. On a

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2} + \ \dots \ + a_n \frac{t^n}{n!} + o(t^n),$$

et

$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 \frac{t^2}{2} + \ \dots \ + b_n \frac{t^n}{n!} + o(t^n).$$

On peut donc écrire

$$M(t) = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \ \dots \ + \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \frac{t^n}{n!} + o(t^n).$$

On voisinage de 0, la courbe passe par le point $M(0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ et si le vecteur vitesse est non nul, c'est-à-dire $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il donne la direction de la tangente à la courbe.

Jusqu'à présent, si le vecteur vitesse était le vecteur nul, on ne savait pas étudier le comportement de la courbe au voisinage du point. Le développement de la fonction M permet de répondre à cette question.

On considère le premier vecteur $\vec{v_p}(0) = \begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix}$ non nul parmis les vecteurs $\vec{v_k}(0) = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$, k variant de 1 à n. On considère ensuite le premier vecteur $\vec{v_q}(0) = \begin{pmatrix} a_q \\ b_q \end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{v_p}(0)$, $q > p$. On peut alors écrire

$$M(t) - M(0) = \frac{t^p}{p!}\vec{v_p}(0) + \frac{t^{p+1}}{(p+1)!}\lambda_{p+1}\vec{v_p}(0) + \ \dots \ + \frac{t^q}{q!}\vec{v_q}(0) + \ \dots \ + \frac{t^n}{n!}\vec{v_n}(0) + o(t^n).$$

Le coefficient λ_{p+1} signifie que le vecteur d'indice $p+1$ est colinéaire au vecteur $\vec{v_p}(0)$. Il faut alors faire une étude de cas selon la parité des entiers p et q.

Dans tous les cas, le vecteur $\vec{v_p}(0)$ donne la direction de la tangente. Il s'agit de donc de savoir si le point est un point de rebroussement, et si la courbe "traverse" la tangente ou reste toujours du même coté de la tangente.

1) p est impair et q est pair (c'est le cas habituel, avec $p = 1$ et $q = 2$). La courbe admet une tangente "classique" et reste du même coté de la tangente.
2) p est impair et q est impair. La courbe admet une tangente "classique" et traverse la tangente (cela s'appelle un point d'inflexion).
3) p est pair et q est impair. La courbe admet un point de rebroussement de première espèce (comme une balle qui rebondit...).
4) p est pair et q est pair. La courbe admet un point de rebroussement de seconde espèce (ne traverse pas la courbe).

Pour les dessins, voir le cours.

Annexe A

Les exercices de TD

A.1 Etude de Fonctions

Pour commencer

Exercice 1 Déterminer les domaines de définition des fonctions f et g définie par $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$.

Exercice 2 Vrai ou faux ?
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \geq 0$?
2) Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et λ un réel, alors λf est croissante sur $\mathbb{R}$.
3) Soient f et g deux fonctions définie sur $\mathbb{R}$. On a forcément $f \leq g$ ou $f \geq g$.
4) La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \dfrac{x - e^x}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
5) Si f ou g est une fonction constante, alors $f \circ g$ est une fonction constante.
6) Si $f \circ g$ est une fonction constante, alors f ou g est une fonction constante.
7) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$.
8) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab > 0$, on a $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

A.1.1 Fonctions usuelles

Exercice 3 Etudier les variations de la fonction $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a l'inégalité

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x\,.$$

Représenter dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \ln(x+1)$, $x \mapsto x$, et $x \mapsto x - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 4 En s'inspirant de l'exercice précéden, montrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x\,.$$

En déduire la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Exercice 5 Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$. Montrer que

$$1 - \cos(5x) = (1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2.$$

En déduire $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$ (on peut en déduire une construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas).

Exercice 6 Fonction homographique. Etudier la la fonction f définie par la formule

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

Exercice 7 Comment lancer le plus loin possible ?
L'équation de la trajectoire d'un projectile lancé avec une vitesse initiale v_0 suivant une direction faisant un angle α avec l'horizontale est donnée par :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + (\tan\alpha)x, \ \ x \in [0, X(\alpha)],$$

g étant l'accélération de la pesanteur et $X(\alpha)$ l'abscisse du point où retombe le projectile. On suppose que v_0 est donné et que le lanceur peut choisir α dans $]0, \pi/2[$.
1) Comment lancer le plus loin possible ?
2) Montrer que tous les points accessibles, en dehors du point le plus loin, peuvent être atteints de deux manières : par un tir tendu et par un tir en cloche.

Fonctions hyperboliques

Exercice 8 Simplifier l'expression

$$y = \frac{\mathrm{ch}\,(\ln x) + \mathrm{sh}\,(\ln x)}{x}.$$

Exercice 9 Calculer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{ch}\,(a + b)$ en fonction de $\mathrm{ch}\, a$, $\mathrm{ch}\, b$, $\mathrm{sh}\, a$ et $\mathrm{sh}\, b$.

A.2 Courbes paramétrées

Paramétrisation

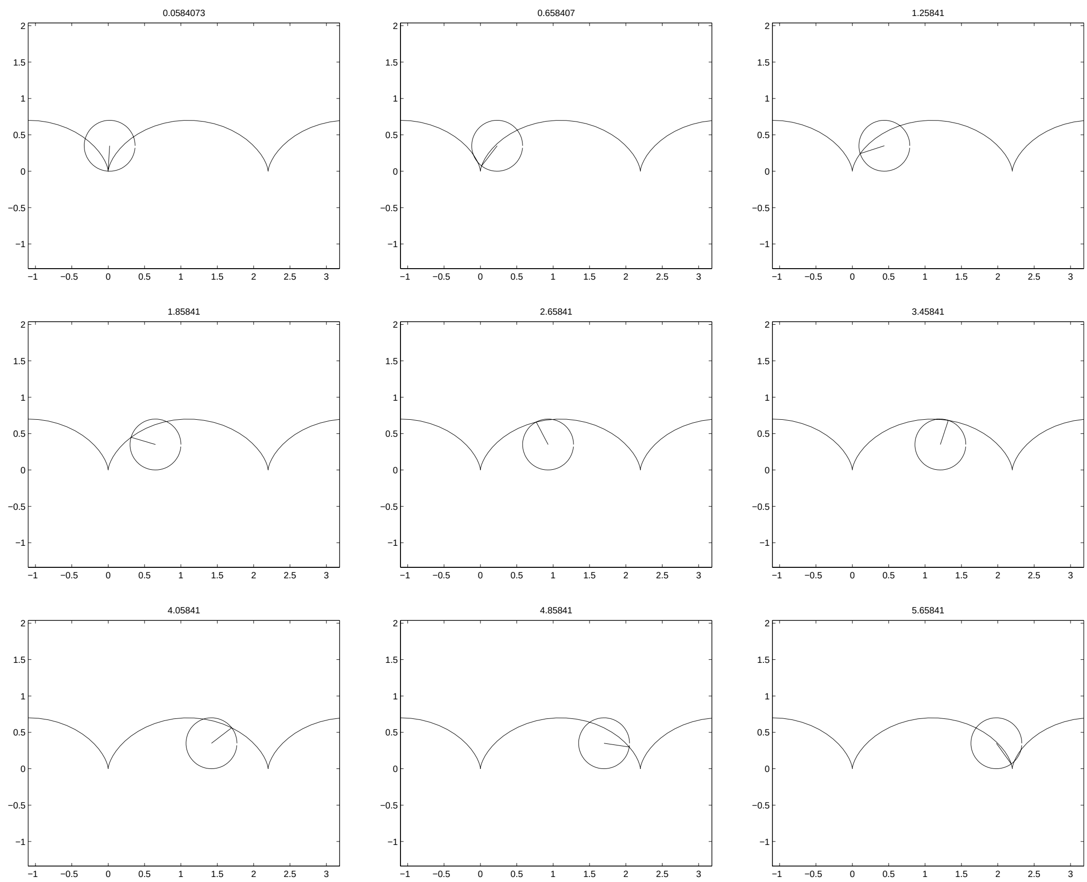
Exercice 10 1) On considère la courbe paramétrée par $t \mapsto \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$. Sans faire de calculs, ni d'étude de fonction, représenter cette courbe.
2) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Que remarquez-vous ?

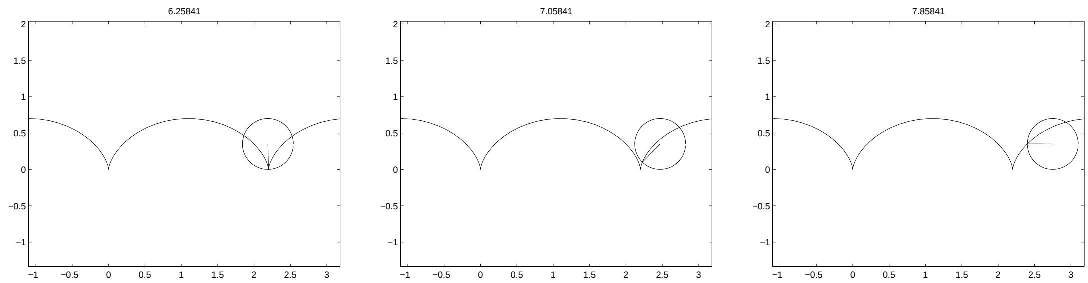
Exercice 11 (La cycloïde) 1) Un homme observe un cycliste qui roule en ligne droite, sans glisser, à vitesse constante V. Il concentre son attention sur le mouvement de la soupape de la roue arrière. Avez-vous une idée de ce qu'il voit ? Pouvez-vous le dessiner ?
2) On suppose que la roue arrière a 2m de diamètre et que, au temps $t = 0$, la soupape a pour coordonnées $(0, 0)$ dans le repère tracé sur le dessin ci-dessous. Montrer que l'équation du mouvement de la soupape est

$$\begin{cases} x(t) = Vt - \sin(Vt) \\ \\ y(t) = 1 - \cos(Vt)\,. \end{cases}$$

3) Etudier cette courbe paramétrée lorsque $V = 1m/s$.

Cycloïde et roue





Exercice 12 (L'hélice) On considère la courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$x(t) = \cos(t)\,, \quad y(t) = \sin(t)\,, \quad z(t) = t\,.$$

Sans faire de calculs, ni d'étude de fonction, représenter la courbe ainsi obtenue. Indiquer les points $M(0)$, $M(\frac{\pi}{2})$, $M(2\pi)$, et $M(\frac{7\pi}{2})$.

Etude de courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^2$

On rappelle la démarche à suivre lors de l'étude d'une courbe paramétrée $M(t) = (x(t), y(t))$.

1. *Domaine de définition de x et y*
2. *Continuité et dérivabilité des deux fonctions.*
3. *Périodicité, parité eventuelles des fonctions x et y. On en déduit un intervalle d'étude commun*
4. *Sens de variation de x et y. Tableau de variation*
5. *Points particuliers, points doubles*
6. *Tangentes remarquables*
7. *Branches infinies. Asymptotes*
8. *Dessin*

Exercice 13 Etudier la courbe paramétrée

$$x(t) = \frac{t-1}{t}\,, \quad y(t) = \frac{t^2}{t+1}\,.$$

Montrer qu'il existe une symétrie de la courbe par rapport à une droite Δ : donner l'équation de cette droite et vérifier que c'est bien un axe de symétrie.

Exercice 14 Etudier la courbe paramétrée

$$x(t) = \cos(t)\,, \quad y(t) = \sin(2t)\,.$$

Exercice 15 Donner le domaine d'étude de la courbe paramétrée

$$x(t) = \sin(t) + \sin(2t)\,, \quad y(t) = \cos(t)\,.$$

Exercice 16 Etudier la courbe paramétrée

$$x(t) = \frac{3}{t^2 - t}\,, \quad y(t) = \frac{t^3 - 2t}{t^2 + 2}\,.$$

Exercice 17 Etudier la courbe paramétrée

$$x(t) = te^t\,, \quad y(t) = te^{-t}\,.$$

A.3 Polynomes et fonctions rationnelles

Pour commencer

Exercice 18 Trouver deux polynômes P et Q tels que

$$\deg(P+Q) < \min(\deg P, \deg Q).$$

Exercice 19 Développer l'expression $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)$, pour $n \geq 1$.

Quelques divisions

Exercice 20 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :
1) (x^n-1) par $(x-1)$,
2) $(3x^5+x^4-6x^2+5x-1)$ par $(2x^3-x+1)$
3) $(2x^5+x^3-x+1)$ par (x^2+1)
4) $\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)$ par $\left(-7x^3+\frac{21}{4}x+\frac{7}{4}\right)$

Exercice 21 Donner le reste de la division euclidienne de $x^{2^{2001}}+4$ par $x-1$.

Exercice 22 Effectuer les divisions selon les puissances croissantes suivantes
1) $f(x)=4+x^2$ par $g(x)=2+3x+x^3$ à l'ordre $l=4$.
2) $f(x)=2+3x+x^3$ par $g(x)=4+x^2$ à l'ordre $l=4$.
3) $f(x)=1-2x+x^2$ par $g(x)=x+1$ à l'ordre $l=5$.
4) $f(x)=1$ par $g(x)=1-x$ à l'ordre $l=4$.

Rappel : la division selon les puissances croissantes de f par g à l'ordre l consiste à trouver deux polynômes Q et R tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)=g(x)Q(x)+x^{l+1}R(x).$$

Formule de Taylor

Exercice 23 Donner la formule de Taylor de $f(x)=x^2-2x+1$ au point 1, et de $g(x)=x^4-8x^2+16$ au point $x=-2$.

Exercice 24 On considère p et q deux réels et soit f la fonction polynomiale suivante

$$f(x)=x^3+px+q.$$

Trouver une relation liant p et q pour que f ait un racine double x_0.

Exercice 25 Soit P le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$P(x)=27x^{19}+37x^{13}+2x^8-x^7+x^6-3x^3+328.$$

Calculer $P^{(3)}(0)$, $P^{(8)}(0)$, $P^{(9)}(0)$, et $P^{(20)}(0)$.

Fonctions rationnelles

Exercice 26 Etudier la fonction rationnelle suivante

$$f(x) = \frac{3x^3 + x - 2}{x^2 - x - 1}.$$

Montrer en particulier que f admet une asymptote oblique dont on donnera l'équation. Calculer la partie entière de f. Retrouver le comportement de f en $+$ ou $-\infty$.

A.4 Quelques notions de logique, Limites et Continuité

Exercice 27 On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des arbres de la forêt de Fontainebleau et $\mathcal{F}$ l'ensemble des feuilles de tous les arbres.

1. Traduire avec des quantificateurs les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses :
   - Il existe un arbre et il existe une feuille qui est sur cet arbre.
   - Tous les arbres ont des feuilles.
   - Tous les chênes de la forêt ont des feuilles rousses en automne.
   - Tous les arbres de la forêt ont perdu leur feuille en hiver.
2. Traduire en français les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses :
   - $\forall A \in \mathcal{A}, \forall f \in \mathcal{F}, f \in A$
   - $\forall f \in \mathcal{F}, \exists A \in \mathcal{A}$ tel que $f \in \mathcal{A}$
   - $\forall f \in \mathcal{F}, \exists A \in \mathcal{A}$ tel que $f \notin \mathcal{A}$

Exercice 28 Dire si les affirmations suivantes sont justes ou fausses :
Soit x un nombre réel,
- si $x = 1$ alors $e^x = e$.
- si $x < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alors $e^x < -\pi$.
- si $x = i + 1$ alors $e^x = 0$.

Exercice 29 Trouver la négation des propositions suivantes :
- Jean porte un béret ou une casquette.
- Si Jean porte un couvre-chef alors il porte un beret ou une casquette.
- Pierre porte un pull et un manteau.
- Il fait froid donc Pierre met un pull et un manteau.
- Si grand mère mange de la soupe alors elle avale son dentier ou elle oublie ses médicaments.
- Toute personne qui a une maison, a, un jour, des problèmes de chauffage.
- Dans chaque famille, où il y a un chien et des enfants jeunes, il y a toujours de l'animation et des cris.

Exercice 30 Trouver la négation des propositions suivantes :
Soit x un nombre réel
- x appartient à $]0, 10[$ et x est un nombre pair.
- x appartient à $]0, 10[$ ou x appartient à $]5, 6[$.

Exercice 31 Remplir avec $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$, ou encore $\times$ lorsque aucune des implications n'est possible. Justifier vos choix.
- $0 \leq \alpha \leq \beta$ .... $\alpha^2 \leq \beta^2$ .... $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \leq 0$.
- $0 \leq \alpha \leq \beta$ .... $0 \leq \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}$ .... $\alpha \leq \beta$.
- $\ln(\alpha) = \ln(\beta)$ .... $\alpha = \beta$.
- la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ .... $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 32 Soient x_0 un nombre réel fixé et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes et donner leur négation :
- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel δ strictement positif tel que, pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Pour tout nombre réel x et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre réel δ strictement positif tel que, pour tout nombre réel y vérifiant $|y - x| < \delta$, alors $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel δ strictement positif tel que, pour tous nombres réels x et y vérifiant $|y - x| < \delta$, alors $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Les deux dernières propositions sont-elles équivalentes ?

Exercice 33 (Limites usuelles) Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\ (1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^4-1}{x^2-1}\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin x}{2x+e}\right), \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} 6^{-x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \left(x^{1/x}\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{ch}\ x}{x^{17}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+2x+1}\right), \quad \lim_{x\to-1} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+2x+1}\right),$$

$$\lim_{x\to+1} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+2x+1}\right), \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+2x+1}\right)$$

Exercice 34 (Continuité) Montrer que la fonction :
- $x \mapsto x^2$ est continue au point $x = 1$.
- $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si x=0} \end{cases}$ est continue au point $x = 0$. [On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$].

Exercice 35
1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que :
$$\forall x \in I, \forall y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$
Montrer que f est continue en tout point $x \in I$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,
$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$
(Indication : on rappelle que $\sin a - \sin b = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.)
En déduire que la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \sin x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \cos x + C_2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Comment faut-il choisir C_1 et C_2 pour que la fonction f soit continue en 0.

Exercice 37 (Théorème des valeurs intermédiaires)
1. On considère deux fonctions f et g, continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que
$$f(a) \leq g(a) \text{ et } f(b) \geq g(b).$$
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.
2. Applications
   (a) Montrer qu'il existe un nombre réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\sin\theta = \theta - 1$.
   (b) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
3. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g(x) = f(x) - x$, montrer à nouveau qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

A.5 Fonctions dérivables

Pour commencer

Exercice 38 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (quand elles existent...) :

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}, \quad x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x, \quad x \mapsto (3x_2)\sqrt{(1+x)^3}, \quad x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 39 Soit f la fonction valeur absolue. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Pour continuer...

Exercice 40 1) Soit f définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais qu'elle n'est pas dérivable en 0.
2) Soit g définie par

$$g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Exercice 41 (Composée) 1) Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Rappeler et démontrer la formule de la dérivée de $f \circ g$.
2) **Dérivée d'une fonction réciproque**
Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction bijective de I dans J. Montrer que si f est dérivable au point $x \in I$ et que $f'(x) \neq 0$ alors la fonction réciproque de f, notée f^{-1}, est dérivable au point $y = f(x)$ et que l'on a la formule suivante

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

3) **Application**
a) Montrer que la fonction tangente est bijective de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$.
b) On appelle Arctg (arc-tangente) la fonction réciproque ainsi obtenue. Calculer la dérivée de Arctg sur $\mathbb{R}$.

Théorème de Rolle et T.A.F.

Exercice 42 Soit f une fonction non constante, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer que pour tout nombre réel k, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = kf(c)$ (indiction : appliquer le Théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(x)e^{-kx}$).

Exercice 43 Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Montrer que si la dérivée de f est nulle, alors f est constante sur $[a, b]$.

A.6 Développements limités

Exercice 44 Donner les développements des fonctions suivantes au point et à l'ordre demandés.
- $f(x) = \exp(\cos(x))$ en $\pi/2$ ordre 4.
- $f(x) = \ln(\tan(x))$ en $\pi/4$ ordre 3.
- $f(x) = \arctan(1+x)$ en 0 ordre 3.
- $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ en 0 ordre 3.
- $f(x) = \exp(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})$ en 0 ordre 2.
- $f(x) = (1+\cos(x)+\sin(x))^{1/x}$ en 0 ordre 3.

Exercice 45 Trouver les limites suivantes

i) $\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$ quand x tend vers 0.

ii) $(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{1/x}$ quand x tend vers 0 (a,b,c ¿0).

iii) $\ln(1-x)\cos(\dfrac{\pi}{2}x)$ quand x tend vers 1.

iv) $\dfrac{\exp(x^2/2)+\ln(\cos(x))-1}{\tan^4(x)}$ quand x tend vers 0.

Exercice 46 Quelle est la meilleure approximation au voisinage de 0 de la fonction $x \longrightarrow \cos(x)$ par une fonction de la forme

$$x \longrightarrow \frac{1+ax^2}{1+bx^2} \text{ où } (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ ?$$

Exercice 47 Soit $f(x) = ch(x) - \frac{12+5x^2}{12-x^2}$. Trouver le développement limité de f en 0 à l'ordre 6 et donner la limite de $\frac{f(2x)}{f(x)}$ en 0.

Exercice 48 Calculer les 5 premières dérivées de la fonction $\frac{\ln(x)}{1+x}$ au point 1.

Exercice 49 Faire une étude locale en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

(continuité, dérivabilité). Donner l'équation de la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 50 Faire l'étude des branches infinies des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(1+e^x) + e^x \ln(1+e^{-x}),$$

$$g(x) = \frac{x^2}{1+e^{1/x}}.$$

Exercice 51 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \mathrm{ch}\,(\sqrt{x}) \textit{ si } x \geq 0 \textit{ et } \cos(\sqrt{-x}) \textit{ si } x < 0.$$

a) Ecrire le développement limité de $\cos(x)$, $ch(x)$ à l'ordre 4 au point 0. Montrer que f a un D.L à l'ordre 2 en 0. Calculer ce D.L.
b) Montrer que f est continue et dérivable en 0.
c) Montrer que f' est continue.

Courbes paramétrées avec point de rebroussement

Exercice 52 Etudier la courbe paramétrée

$$x(t) = \frac{t^2}{t^2+1}, \quad y(t) = tx(t).$$

Exercice 53 Etudier la courbe paramétrée

$$x(t) = t + \frac{1}{t}, \quad y(t) = t + \frac{1}{t^2}.$$

Exercice 54 Etudier la courbe paramétrée

$$x(t) = \cos^2(t) + \ln(\sin(t)), \quad y(t) = \sin(t)\cos(t).$$