SERIES

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide des principaux résultats à connaître sur les séries.

1 Séries numérique à termes réels

1.1 Généralités

- On appelle série numérique réelle de terme général u_n, on note $\sum_{n\geq 0} u_n$ la suite $(S_n)_n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ où $(u_n)_n$ est une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $u_0 = S_0$ et $u_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geq 1$.
- la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(S_n)_n$ converge.

  Si $\lim_{n\to+\infty} S_n = l$, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et a pour somme l. On note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = l$.
- Pour une série $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est la somme partielle d'ordre n et si la série converge et a pour somme S alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k\geq n+1} u_k$ converge et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S = S_n + R_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

.
- Pour une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge si et seulement si } \sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge}$$

.
- **Condition nécessaire de convergence : Si** $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge **Alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

  Attention : la réciproque est fausse :

  Exemple 1 *On a* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *et pourtant* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge*
- Si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, dans ce cas elle est convergente. Si la série converge sans converger absolument on dit qu'elle est semi-convergente.

  Exemple 2 *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *est semi-convergente.*

1.2 Séries à termes positifs

1.2.1 Convergence

$u_n \geq 0$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si les sommes partielles sont majorées.

1.2.2 Relations de comparaison

- Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $0 \leq u_n \leq v_n$ alors $\left\{\begin{array}{lll} \sum v_n \text{ converge} & \Rightarrow & \sum u_n \text{ converge} \\ \sum u_n \text{ diverge} & \Rightarrow & \sum v_n \text{ diverge} \end{array}\right.$
- Si $\forall n \geq 0,\ u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ avec $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ converge

1.2.3 Séries de Riemann

Définition 1 *On appelle série de Riemann une série de terme général* $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1 *La série de Riemann* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

1.2.4 Séries géométriques

Proposition 2 *On considère une série géométrique de premier terme non-nul* $u_0 \in \mathbb{R}^*$ *et de raison* $q \in \mathbb{R}$ *:*

1. *Si* $|q| < 1$ *la série converge absolument et* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{u_0}{1-q}$
2. *Si* $|q| \geq 1$ *la série diverge (le terme général ne convege pas vers* 0 *lorsque* n *tend vers* $+\infty$*)*

1.2.5 Développement décimal

Soit $S_D = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}},\ c_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq 1,\ c_n \in [\![0,9]\!],\ \text{il n'existe pas } n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ c_n = 9\}$

Théorème 1 *L'application :*

$$\begin{array}{lcl} S_D & \to & \mathbb{R}^+ \\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n} \end{array}$$

est une bijection, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n}$ *est le développement décimal de* x

Pour $x \in \mathbb{R}^+,\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n}$ avec $c_0 = E(x),\ c_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq 1,\ c_n = E(10^n x) - 10E(10^{n-1}x),\ c_n\ [\![0,9]\!]$,
$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_D$ avec si $t \in \mathbb{R}^+,\ E(t)$ désigne la partie entière de t
Si $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{10^k}$, x_n est une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près, $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$

1.3 Séries à termes de signes quelconques

1.3.1 Règle de d'Alembert

$$\text{Si } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n \neq 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \text{ Alors } \left\{ \begin{array}{lll} l < 1 & \Rightarrow & \sum u_n \text{ est absolument convergente} \\ l > 1 & \Rightarrow & \sum u_n \text{ est divergente} \\ l = 1 & & \text{on ne peut pas conclure.} \end{array} \right.$$

1.3.2 Théorème Spécial des Séries Alternées(appelé parfois théorème de Leibniz)

$$\textbf{Si} \left\{ \begin{array}{ll} 1) & (u_n)_n \text{ est à termes positifs} \\ 2) & (u_n)_n \text{ est décroissante} \\ 3) & \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{array} \right. \qquad \textbf{Alors} \left\{ \begin{array}{ll} 1) & \sum(-1)^n u_n \text{converge} \\ 2) & \forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \\ 3) & \forall n \in \mathbb{N}\ |R_n| \leq u_{n+1} \end{array} \right.$$