Suites et Séries géométriques

Définition 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathbb{K}$ *où* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$,
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique si et seulement si* $\exists q\in\mathbb{K}, \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=qu_n$,
q est appelé la raison de la suite géométrique.

Proposition 1
Une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est entièrement déterminée par son premier terme* $u_0=a$, $a\in\mathbb{K}$, *et sa raison* q, $q\in\mathbb{K}$. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite géométrique de premier terme* a *et de raison* q.
On a alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=aq^n$.

Proposition 2 (convergence d'une suite géométrique)
la suite géométrique de premier terme $u_0\neq 0$ *et de raison* q *converge si et seulement si* $|q|<1$ *et alors* $\lim\limits_{n->+\infty} u_n=0$ *ou* $q=1$ *et alors la suite est constante* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0$.

Définition 2
On appelle série géométrique une série dont le terme général est le terme général d'une suite géométrique .

Proposition 3 (Somme des n premiers termes)
La somme des n+1 premiers termes d'une série géométrique de premier terme u_0 *et de raison* q *est :*
$$\sum_{k=0}^{n} u_n = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (= premierterme\frac{1-raison^{\text{nombre de termes}}}{1-raison})$$

Proposition 4 (convergence d'une série géométrique)
La série géométrique de premier terme $u_0\neq 0$ *et de raison* $q\neq 0$ *converge si et seulement si* $|q|<1$.
Si $|q|<1$ *on a alors* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0\dfrac{1}{1-q}$ $(=\dfrac{premierterme}{1-raison})$ *avec* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *on a aussi :*
$R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_0\dfrac{q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{u_{n+1}}{1-q}$ *avec* $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{N} u_k$ *de plus* $\dfrac{u_0}{1-q}=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k+R_n$

Exemple

Exercice

Montrer que $\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ avec $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ et en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2$

solution : Pour $t\in[0,1]$ on a : $\sum\limits_{k=0}^{n}(-t)^k=\dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1\ +\ t}$
de sorte que pour : $t\in[0,1]$ on a $\dfrac{1}{1+t}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-t)^k+\dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}$ d'où $\int_0^1\dfrac{dt}{1+t}=\int_0^1(\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kt^k)dt+\int_0^1\dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}$ dt
soit on obtient : $\int_0^1\dfrac{dt}{1+t}=\sum\limits_{k=0}^{n}\int_0^1(-1)^kt^kdt+\int_0^1\dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}\ dt$ avec $0\leq|\int_0^1\dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}dt|\leq\int_0^1 t^{n+1}dt\leq\dfrac{1}{n+2}$
d'où $\lim\limits_{n->+\infty}\int_0^1\dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}\ dt=0$ et par suite :

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\ \text{ soit }\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2$$