SERIES DE FOURIER

1 Coefficients de fourier

Soit $\mathcal{C}_{2\pi mx}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques et continues par morceaux et $f \in \mathcal{C}_{2\pi mx}$:

1. **Coefficients de fourier exponentiels**

   Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-int} f(t)dt$

2. **Coefficients de fourier trigonométriques**

   Pour $n \in \mathbb{N}$, $$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nt)f(t)dt \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nt)f(t)dt \end{aligned}$$

   Remarque 1

   – *Si f est paire alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\pi} \cos(nt)f(t)dt$ *et* $b_n(f) = 0$

   – *Si f est impaire alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$ *et* $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\pi} \sin(nt)f(t)dt$

3. **Relations**

   $\forall n \in \mathbb{N},$ $$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} & c_{-n}(f) &= \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \\ a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f) & b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{aligned}$$

4. **Série de Fourier de f**

   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

   sommes partielles : $S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_k(f)e^{int} = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)$

5. **Propriétés**

   $\mathbf{P_1}$: $f \in \mathcal{C}_{2\pi mx} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} c_{-n}(f) = 0$.

   $\mathbf{P_2}$: Si f est 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

   $\mathbf{P_3}$: Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, alors $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ d'où $c_n(f) = o(\dfrac{1}{n^k})$.

2 Théorèmes de convergence

Théorèmes de Dirichlet :

Théorème 1

Hypothèses : $\begin{cases} 1. f \textit{ est } 2\pi \textit{ périodique sur } \mathbb{R} \textit{ à valeurs dans } \mathbb{C} \\ 2. f \textit{ est continue sur } \mathbb{R} \\ 3. f \textit{ est de classe } C^1 \textit{par morceaux sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Conclusion : *La série de fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f*

Théorème 2

Hypothèses : $\begin{cases} 1. f \text{ est } 2\pi \text{ périodique sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans } \mathbb{C} \\ 2. f \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Conclusion : *La série de fourier converge sur* $\mathbb{R}$ *et a pour somme* $\widetilde{f}$

avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{h->0^+} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$

en particulier : *si* f *est continue en* x, $\widetilde{f}(x) = f(x)$

Théorème 3 (Théorème de Parseval)
Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi mx}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2}{2}$$

Théorème 4
Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ *(*$\mathbb{C}$*-espace vectoriel des fonctions* 2π*-périodiques définies et continues sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$*)*
$(f, g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^2$ *si* $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = c_n(g)$ *alors* $f = g$

3 Fonctions T-périodiques

Pour $T > 0$ soit $\mathcal{C}_{Tmx}$ l'algèbre des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ T-périodiques et continues par morceaux.

Pour f application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ on pose $g(t) = f(\frac{T}{2\pi}t),\ t \in \mathbb{R}$.
$f \in \mathcal{C}_{Tmx}$ si et seulement si $g \in \mathcal{C}_{2\pi mx}$, les résultats sur les séries de fourier applicables à g se traduisent alors aisément pour f.
Coefficients de fourier de f

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)e^{-\frac{2in\pi}{T}u}du, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\cos(n\frac{2\pi}{T}u)du \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\sin(n\frac{2\pi}{T}u)du$$

ou en posant $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)e^{-in\omega u}du, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\cos(n\omega u)du \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\sin(n\omega u)du$$