# Exercices

## 1 Séries numériques

**Exercice 1**

*On pose* $F(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$ *et* $G(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}$ *pour* $x\in]0,+\infty[$

1. *Montrer que pour* $x>0$ *les séries* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}e^{-nx}$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-nx}}{n}$ *convergent*
2. *Pour* $x>0$ *on pose* $H(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}G(t)\mathtt{dt}=\lim_{X\to+\infty}\int_x^X G(t)\mathtt{dt}$, *montrer que :* $H=F$
3. *En déduire la valeur de* $F(x)$

**Exercice 2**

*Etudier la nature de la série de terme général* $u_n$ *dans les cas suivants :*

1. $u_n=\dfrac{\sin^2 n}{n^2+\cos n}$
2. $u_n=\ln(1+\dfrac{\sqrt{\sin(n^2+1)}}{n^2})$
3. $u_n=\dfrac{\pi^n}{(2n+1)(4n+2)}$
4. $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$
5. $u_n=n\ln(1+\dfrac{1}{n})-\cos(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$
6. $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$

**Exercice 3**

*Pour* $x\in\mathbb{R}$ *à l'aide de l'inégalité de Taylor Lagrange montrer que :* $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

**Exercice 4**

*Etudier la convergence et calculer :*

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2+k+1}{k!}$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\ln(1+\frac{2}{k(k+3)})$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$

**Exercice 5**

$\alpha>0$, *établir la convergence de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$ *et montrer que :* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\alpha+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$

*En déduire :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

**Exercice 6 (Constante d'Euler)**

*On considère la série de terme général* $u_n=\dfrac{1}{n}-\ln(1+\dfrac{1}{n})\quad n\geq 1.$

1. *Montrer que la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ *converge*
2. *En déduire que :*

$$\lim_{n->+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=C$$

*où* $C$ *est une constante réelle,* $C>0$. $C$ *est la constante d'Euler.*

3. *Puis en déduire que :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{+\infty}{\sim}\ln n$

# 2 Séries de Fourier

## 2.1 Décomposition en série de Fourier

**Exercice 7** *Déterminer la série de fourier des fonctions suivantes et étudier la convergence :*

1. $f_1(t) = \sin t + \cos t$
2. $f_2(t) = \cos^2 t$
3. $f_3(t) = \sin(2003t)$
4. $f_4(t) = \cos^{2n} t$

**Exercice 8** *Soit $f$ $2\pi$ périodique, impaire telle que $\forall t \in [0, \pi]$ $f(t) = \pi t - t^2$*

1. *Etudier la convergence la série de fourier de $f$ et déterminer cette série.*
2. *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

**Exercice 9** *Soit $f$ $2\pi$ périodique, telle que $\forall t \in ]-\pi, \pi[$ $f(t) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{t^2}{4}$*

1. *Déterminer la série de fourier de $f$ et étudier sa convergence.*
2. *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

## 2.2 Formule de Parseval

**Exercice 10** *Soit $f$ $2\pi$ périodique, paire telle que $\forall t \in [0, \pi]$ $f(t) = 1 - \dfrac{t^2}{\pi^2}$*

1. *Déterminer la série de fourier de $f$ et étudier sa convergence.*
2. *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$; $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

**Exercice 11** *On considère la série trigonométrique* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nt)}{\ln n}$

*Existe-t-il une fonction $f$ $2\pi$-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ qui admette la série précédente pour série de fourier ?*

**Exercice 12** *Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $[0, 1]$ et telle que $f(0) = f(1) = 0$.*

*Montrer à l'aide de la formule de Parseval que* $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2\, dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \left|f'(t)\right|^2 dt$, *on prolongera $f$ par imparité et $2-$périodicité.*