

# DERIVATION

$I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

## 1 DERIVABILITE

### 1.1 Définitions

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ ,

**Définition 1**  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et appartient à  $\mathbb{R}$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**Définition 2**  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $x_0$  (on note  $\mathbf{DL}_1(x_0)$ ) si et seulement si  $\exists A \in \mathbb{R}, \forall h$  tq  $x_0 + h \in I$   $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h)$

**Proposition 1**  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f$  admet un  $\mathbf{DL}_1(x_0)$  et on a alors  $f'(x_0) = A$  soit  $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + o(h)$ .

**Définition 3**  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$  (resp. à gauche) si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$

$$(\text{resp. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R})$$

$$\text{On note : } f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \quad (\text{resp. : } f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R})$$

**Proposition 2**  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable à droite et à gauche en  $x_0$  et  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

**Définition 4**  $f$  est dérivable sur  $I$  si et seulement si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ ,  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow f'(x)$   
est la fonction dérivée de  $f$ .

**Proposition 3** Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

! la réciproque est fautive.  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

### 1.2 Interprétation géométrique

**Tangente** : Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  Alors la courbe représentative de  $f$  admet au point de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$  une tangente qui a pour équation :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  à droite (resp. à gauche), la courbe de  $f$  admet une demi-tangente de pente  $f'_d(x_0)$  (resp.  $f'_g(x_0)$ ).

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty$ , la courbe de  $f$  admet une tangente « verticale » au point de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$

### 1.3 Propriétés de la dérivée

#### 1.3.1 Opérations :

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x_0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors  $f + g, \lambda f, f \cdot g$  sont dérivables en  $x_0$ , si de plus  $g(x_0) \neq 0$  alors  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $x_0$ .

$$\begin{aligned} & - (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \\ & - (\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0) \\ & - (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ & - \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \end{aligned}$$

**1.3.2 Composée :**

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$  alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ .

**1.3.3 Réciproque :**

Si  $f : I \rightarrow f(I)$  est continue, bijective et dérivable en  $x_0$   
 Alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  si et seulement si  $f'(x_0) \neq 0$   
 $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$

**2 THEOREMES**

**Proposition 4** Si  $f$ , dérivable en  $x_0$  avec  $f$  définie sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ , admet un extrémum local en  $x_0$  Alors  $f'(x_0) = 0$ .

Cette proposition donne une condition nécessaire d'existence d'un extrémum dans le cas où  $f$  est définie à droite et à gauche de  $x_0$ . L'étude de la fonction au voisinage de  $x_0$  indiquera s'il s'agit bien d'un extrémum. Il est d'usage de préciser la proposition de la façon suivante :

**Proposition 5** Soit  $f$ , dérivable sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ .  $f$  admet un extrémum local en  $x_0$  si et seulement si la dérivée s'annule en changeant de signe en  $x_0$ .

**Proposition 6** Soit  $f$  une fonction numérique dérivable sur un intervalle  $I$ .  
 $f$  est croissante (resp. décroissante) sur  $I$  si et seulement si sa dérivée est positive (resp. négative) ou nulle sur  $I$

**Remarque 1** Soit  $A = \{x \in I, f'(x) = 0\}$ , la croissance (resp. décroissance) dans la proposition précédente est stricte sur  $I$  si et seulement si  $A$  ne contient pas d'intervalle de longueur non-nulle.

Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  avec  $a < b$  :

**Théorème 1 (de Rolle)**

Si

- $f$  est définie et continue sur  $[a, b]$
- $f$  est dérivable sur  $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors Il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$

**Théorème 2 (des Accroissements Finis)**

Si

- $f$  est définie et continue sur  $[a, b]$
- $f$  est dérivable sur  $]a, b[$

Alors Il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

**Théorème 3 (-Inégalités des accroissements finis)**

Si

- $f$  est définie et continue sur  $[a, b]$
- $f$  est dérivable sur  $]a, b[$
- $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M$

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

**Théorème 4 (de prolongement)**

Si  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  et  $f'$  admet une limite finie au point  $a$

Alors  $f$  se prolonge par continuité en  $a$  et le prolongement est dérivable avec  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$

### 3 DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR

Si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur l'intervalle  $I$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $f^{(n)}$  la dérivée  $n^e$  de  $f$ ,  $f^{(2)} = f'' = (f')'$ ,  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ .

#### Définition 5

- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur l'intervalle  $I$  si et seulement si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ .
- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue sur  $I$ .
- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  si et seulement si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$ .

#### Théorème 5

##### Si

- $f$  est définie et continue sur  $[a, b]$ , de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  sur  $]a, b[$
- $f^{(p)}$  admet une limite finie en  $a$

##### Alors

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $[a, b]$ .

##### propriétés :

- Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$  ou  $n = +\infty$ ) sur  $I$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$   
Alors  $f + g$ ,  $\lambda \cdot f$ ,  $f \cdot g$  et  $\frac{f}{g}$  (si  $g \neq 0$ ) sont de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$
- Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$  ou  $n = +\infty$ ) sur  $I$  à valeurs dans  $J$  et  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$   
Alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .
- Si  $f$  est bijective, de classe  $\mathcal{C}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$  ou  $n = +\infty$ ) sur  $I$  à valeurs dans  $J$  et  $f' \neq 0$  sur  $I$   
alors  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$ .

**Formule de Leibniz**  $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$ .

#### Formule de Taylor avec reste intégral :

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{(n+1)}$  sur  $I$ ,  $\forall (a, b) \in I^2$ ,  $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt$

#### Formule de Taylor avec reste de Lagrange :

Soit  $f$   $(n+1)$  fois dérivable sur  $I$ ,  $\forall (a, b) \in I^2 \exists c \in ]a, b[$ , tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

#### Inégalité de Taylor Lagrange

Soit  $f$   $(n+1)$  fois dérivable sur  $I$  avec  $\forall x \in I$ ,  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , on a :

$$\forall (a, b) \in I^2 \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \right| \leq M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

### 4 FONCTIONS CONVEXES

**Définition 6** Soit  $f$  définie sur l'intervalle  $I$ ,  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1] \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ .

Interprétation géométrique :  $f$  est convexe si et seulement si pour tout couple de points  $(M, N)$  de la courbe représentative de  $f$  la corde  $[M, N]$  est au « au dessus » de l'arc  $(MN)$  de la courbe.

**Définition 7**  $f$  est concave si et seulement si  $-f$  est convexe.

**Proposition 7** Soit  $f$  convexe sur  $I$ ,  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$ ,  $f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$

#### Proposition 8

- Soit  $f$  dérivable sur  $I$  :  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est croissante sur  $I$  (la courbe de  $f$  est au dessus de chacune de ses tangentes).
- Si  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$  :  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f'' \geq 0$  sur  $I$ .