INTEGRATION sur un segment

I *désigne un intervalle,* $(a,b)\in I^2$.

I-PRIMITIVES

Définition : Soit f et F deux fonctions numériques définies sur I .
est une primitive de f sur I **ssi** F est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in I$.

Proposition : * Si F et G sont deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I
Alors $\exists\ k\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in I\ F(x)=G(x)+k$.

*Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les fonctions G de la forme $G(x)=F(x)+k$ $\forall x\in I$ où $k\in\mathbb{R}$.

Corollaire : Si f admet une primitive sur un intervalle I, pour $(x_0,y_0)\in I\times\mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$

Théorème : **Si** f est une fonction continue sur un intervalle I **Alors** f admet une primitive sur I (et donc une infinité.)

II-INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Définition : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$.
On appelle intégrale de f de a à b le réel $F(b)-F(a)$ (il est indépendant de F).
On note : $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Proposition : Soit f continue sur I, pour $a\in I$ la fonction F_a définie sur I par $F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a. En particulier la fonction F_a est de classe C^1 sur I et $F_a'=f$.

Propriétés : Soient f et g deux fonctions continues définies sur I , $(a,b,c)\in I^3$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- Linéarité : $\int_a^b[\alpha.f(x)+\beta.g(x)].dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
- Positivité de l'intégrale : Si $a\le b$ et $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\ge 0$ Alors $\int_a^b f(x).dx\ge 0$

Conséquences: 1) Si $a\le b$ et $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\le g(x)$ Alors $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

2) Si $a<b$ et $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\ge 0$ alors $\int_a^b f(x)dx=0\Rightarrow f(x)=0\ \forall x\in[a,b]$

3) Si $a\le b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx\le(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

III-CALCULS D'INTEGRALES

Intégration par parties: Soient u et v de classe C^1 sur $[a,b]$ alors
$\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$

Changement de variable: Soit f continue sur I et u une fonction de classe C^1 sur un intervalle d'extrémités α et β à valeurs dans I Alors $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[u(t)].u'(t)dt$

IV-SOMMES DE RIEMANN

Définition 1: Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[a,b]$, $a<b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel $\dfrac{1}{b-a}.\int_a^b f(t)dt$

Définition 2: Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[a,b]$, $a<b$.

On appelle sommes de Riemann attachées à f les suites (s_n) et (t_n) définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right) \quad et \quad t_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right).$$

remarque: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n - s_n = \dfrac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$

Théorème:Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

Les suites (s_n) et (t_n) des sommes de Riemann de f sont convergentes et ont pour limite commune $\int_a^b f(t)dt$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}.\sum_{j=1}^{n} f\left(a+j\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

remarque: Si f est monotone alors les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes et ont pour limite commune $\int_a^b f(t)dt$.

V-FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a,b]$.On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si f n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[a,b]$.et si f admet une limite à droite et une limite à gauche en chacun de ces points.

Pour f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ avec $a_0=a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n=b$ les points de discontinuité de f.
On notera f_k le prolongement par continuité de f sur $[a_k,a_{k+1}]$ pour $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$.

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a,b]$. f est une fonction en escalier sur $[a,b]$ si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ avec pour tout $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$, f_k constante sur $[a_k,a_{k+1}]$

Définition:

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ avec $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ les points de discontinuité de f et f_k le prolongement par continuité de f sur $[a_k,a_{k+1}]$. On définit l'intégrale de a à b de f par: $\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t)dt$

Propriétés : Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I, $(a,b,c)\in I^3$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
(on dit que f est continue par morceaux sur un intervalle I ssi f est continue par morceaux sur tout $[a,b]\subset I$)

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Linéarité : $\int_a^b [\alpha. f(x)+\beta.g(x)].dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Positivité de l'intégrale : Si $a\leq b$ et $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\geq 0$ Alors $\int_a^b f(x).dx \geq 0$

Si $a \leq b$ et $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ et $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

Proposition: Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors $F:\ [a,b]\to\mathbb{R}$, $x \to \int_a^x f(t)dt$ est définie et continue sur $[a,b]$.

de plus* F est dérivable en tout point x où <u>f est continue</u> et $F'(x)=f(x)$.

* En un point x où f n'est pas continue: $F'_d(x) = \lim_{t\to x^+} f(t)$ *et* $F'_g(x) = \lim_{t\to x^-} f(t)$