DEVELOPPEMENTS LIMITES

1 Définitions

Voici quelques notions utiles pour étudier une fonction numérique au voisinage d'un point et donc pour aborder les développements limités.

1.1 Voisinage d'un point

Définition 1
Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a toute partie $V \subset \mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert contenant a.

Définition 2 *Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage à droite (resp. gauche) de a toute partie $V \subset \mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]a, \alpha[, a < \alpha$ (resp.$]\alpha, a[, \alpha < a$), $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Noter que dans cette définition a n'appartient pas nécessairement au voisinage à droite ou à gauche.

Définition 3 *On appelle voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$ (resp. $]-\infty, \alpha[$), $\alpha \in \mathbb{R}$*

Notation : $\overline{\mathbb{R}}$ désignera l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
Pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$ on désignera par $\mathcal{V}_a$ (resp. $\mathcal{V}_a^+, \mathcal{V}_a^-$) l'ensemble des voisinages (resp. voisinage à droite, à gauche) de a.

1.2 Etude au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Définition 4 *On dit qu'une fonction numérique de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si l'ensemble de définition de la fonction contient un voisinage de a*

Définition 5 *On dit qu'une fonction numérique de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$ est définie sur voisinage à droite (resp. à gauche) d'un point $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si l'ensemble de définition de la fonction contient un voisinage à droite (resp. à gauche) de a*

Pour une fonction numérique de la variable réelle f et $a \in \mathbb{R}$ on pose $f_a(h) = f(a+h)$. f est définie au voisinage de a si et seulement si f_a est définie au voisinage de 0. Etudier f au voisinage de a est équivalent à étudier f_a au voisinage de 0.

Pour une fonction numérique de la variable réelle f et $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) on pose $f_a(h) = f(\frac{1}{h})$. f est définie au voisinage de a si et seulement si f_a est définie sur un voisinage à droite de 0 (resp. à gauche de 0). Etudier f au voisinage de a est équivalent à étudier f_a sur un voisinage à droite de 0 (resp. à gauche de 0).

Dans la suite les fonctions considérées seront des fonctions numériques de la variable réelle définies au voisinage de 0 sauf peut-être en 0, le lecteur adaptera les définitions et les résultats pour une fonction définie sur un voisinage à droite ou à gauche de 0.

1.3 Comparaison des fonctions

1.3.1 Domination

Définition 6 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on dit que f est dominée par g (on dit parfois que f est bornée devant g) au voisinage de 0 si et seulement si il existe un voisinage V de 0 et un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in V,\ |f(x)| \leq M|g(x)|$*

On note : $f \preceq g$ (notation de Hardy), ou $f = O(g)$ (notation de Landau)

Définition 7 *On dit qu'une fonction f est bornée au voisinage de 0 si et seulement si $f = O(1)$, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ et un voisinage V de 0 tel que $\forall x \in V,\ |f(x)| \leq M$*

Proposition 1 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de 0 , sauf peut-être en 0 et si $g(0) = 0$ alors $f(0) = 0$. $f = O(g)$ si et seulement si $\dfrac{f}{g}$ est une fonction bornée au voisinage de 0*

1.3.2 Prépondérance

Définition 8 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on dit que f est négligeable devant g, ou que g est prépondérante devant f au voisinage de 0 si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage V de 0 tel que $\forall x \in V,\ |f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$.*

On note : $f \ll g$ (notation de Hardy), ou $f = o(g)$ (notation de Landau)

Définition 9 *On dit qu'une fonction f a pour limite 0 en 0 si et seulement si $f = o(1)$, c'est à dire que $\forall\epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_0,\ \forall x \in V,\ |f(x)| \leq \epsilon$*

On note : $\lim\limits_{0} f = 0$ ou $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Proposition 2 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de 0, sauf peut-être en 0 et si $g(0) = 0$ alors $f(0) = 0$. On a l'équivalence suivante :*
$f = o(g)$ si et seulement si $\lim\limits_{0} \dfrac{f}{g} = 0$

1.3.3 Equivalence

Définition 10 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on dit que f est équivalente à g au voisinage de 0 si et seulement si $f - g = o(g)$*

On note : $f \sim g$

Proposition 3 *On a : $f \sim g$ si et seulement si $g \sim f$.*

Définition 11 *On dit qu'une fonction f a pour limite l, $l \in \mathbb{R}^*$ en 0 si et seulement si $f \sim l$, c'est à dire que $\forall\epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_0,\ \forall x \in V,\ |f(x) - l| \leq \epsilon$*

On note : $\lim\limits_{0} f = l$ ou $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$

Proposition 4 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de 0, sauf peut-être en 0 et si $g(0) = 0$ alors $f(0) = 0$. On a l'équivalence suivante : $f \sim g$ si et seulement si $\lim\limits_{0} \dfrac{f}{g} = 1$*

2 Développements limités

Les développements limités permettent de préciser le comportement d'une fonction numérique au voisinage d'un point. S'il n'y a pas d'indication les fonctions considérées seront des fonctions numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies au voisinage de 0.

2.1 Définition

Définition 12 *La fonction f admet un développement limité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) au voisinage de 0 (on notera f admet un $DL_n(0)$) si et seulement si, il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ $a_k \in \mathbb{K},\ k \in \{0, \cdots, n\}$ tel que au voisinage de 0, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$.*

Définition 13 *Si la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, le polynôme P_n s'appelle partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en 0, on dit aussi développement limité de f à l'ordre n en 0.*

Remarque 1 *Suivant le contexte l'expression "développement limité de f à l'ordre n" désigne aussi bien l'égalité : $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ que le polynôme P_n.*

Exemple 1 $e^{it} = 1 + it + o(t)$ *est un* $DL_1(0)$

Proposition 5
Si
f admet un $DL_n(0)$
Alors
- *Celui-ci est unique c'est à dire que le polynôme P_n est unique.*
- *f admet un $DL_k(0)$, $\forall k \leq n$, celui-ci est obtenu en prenant le reste de la division euclidienne du développement de f par X^{k+1}*

Définition 14 *Si f admet un $DL_n(0)$, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ avec $P_n(x) = a_p x^p + \cdots + a_n x^n$, $p \leq n$, $a_p \neq 0$, p est la valuation de P_n et $a_p x^p$ est la partie principale du développement limité.*

Proposition 6

1. *f admet un $DL_0(0)$ si et seulement si $\lim\limits_0 f$ existe dans $\mathbb{K}$, on a alors $f(x) = \lim\limits_0 f + o(1)$*
2. *f admet un $DL_1(0)$ si et seulement si f est dérivable en 0, on a alors $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$*

Remarque 2

1. *On peut parler de $DL(0)$ même si $f(0)$ n'existe pas du moment que f est définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0 on a alors :*
   - *f admet un $DL_0(0)$ si et seulement si f se prolonge par continuité en 0*
   - *f admet un $DL_1(0)$ si et seulement si f se prolonge par continuité en 0 et le prolongement est dérivable en 0.*
2. *Pour $n \geq 2$, f peut admettre un $DL_n(0)$ sans que $f^{(n)}(0)$ existe. Exemple : $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ admet un $DL_2(0)$ mais $f^{(2)}(0)$ n'existe pas.*

3 Propriétés

3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Formule de Taylor avec reste de Young

Théorème 1
Si *f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0*
Alors *f admet un $DL_n(0)$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^k(0) + o(x^n)$.*

Remarque 3 *f définie et de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a admet un $DL_n(a)$ car $g(h) = f(a+h)$ admet un $DL_n(0)$ et on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^k(a) + o((x-a)^n)$*

Remarque 4 *En fait le théorème s'applique avec des hypothèses plus faibles :*

Théorème 2
Si *$f^{(n-1)}$ est définie au voisinage de 0 et $f^n(0)$ existe*
Alors *f admet un $DL_n(0)$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^k(0) + o(x^n)$.*

Remarque 5 *On peut parfois alléger les calculs, c'est à dire économiser un terme dans le développement en utilisant le théorème suivant :*

Théorème 3
Si *f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0*
Alors *f admet un $DL_{n-1}(0)$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^k(0) + O(x^n)$.*

On dit que f admet un développement limité d'ordre $n-1$ au sens "fort". Une fonction qui est un $O(x^n)$ est un $o(x^{n-1})$. De façon imagée, en terme de "rapidité" de convergence un $o(x^{n-1})$ converge vers 0 moins "vite" qu'un $O(x^n)$ qui lui-même converge moins "vite" qu'un $o(x^n)$

3.2 Opérations sur les DL

3.2.1 Addition

Théorème 4
Si
- f *admet un* $DL_n(0)$, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$
- g *admet un* $DL_n(0)$, $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

Alors
$f+g$ *admet un* $DL_n(0)$ $(f+g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + o(x^n)$

Le développement limité de $f+g$ en 0 à l'ordre n est la somme des développements limités de f et g à l'ordre n

3.2.2 Multiplication

Théorème 5
Si
- f *admet un* $DL_n(0)$, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$
- g *admet un* $DL_n(0)$, $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

Alors
$f \cdot g$ *admet un* $DL_n(0)$ $(f \cdot g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$ *où* R_n *est le reste de la division euclidienne de* $P_n \cdot Q_n$ *par* X^{n+1}.

Exemple 2 *Déterminer le* $DL_5(0)$ *de la fonction* $h(x) = (1 - \cos(x)) \cdot \ln(1+x)$.
On a :

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad et \quad \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

$$P_5 \cdot Q_5(x) = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) \cdot (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + o(x^5)$$

$$h(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + o(x^5)$$

3.2.3 Rapport

Théorème 6
Si

f *admet un* $DL_n(0)$, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

g *admet un* $DL_n(0)$, $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$g(0) \neq 0$

Alors $\frac{f}{g}$ *admet un* $DL_n(0)$ $\frac{f(x)}{g(x)} = R_n(x) + o(x^n)$ *où* R_n *est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre* n *de* P_n *par* Q_n.

Exemple 3 *Déterminer le* $DL_5(0)$ *de* tan
on a :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) \cdot (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5) + o(x^5) \quad \textit{de sorte que :}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

3.2.4 Composée

Théorème 7
Si

f admet un $DL_n(0)$, $\quad f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

g admet un $DL_n(0)$, $\quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$g(0) = 0$

Alors *$f \circ g$ admet un $DL_n(0)$,* $\quad f \circ g(x) = R_n(x) + o(x^n)$ *où R_n est le reste de la division euclidienne de $P_n \circ Q_n(X)$ par X^{n+1}.*

Exemple 4 *$h(x) = e^{\sin(x)}$,déterminer le $DL_3(0)$ de h*

$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ *d'où :*

$h(x) = 1 + (x - \dfrac{x^3}{6}) + \dfrac{1}{2}(x - \dfrac{x^3}{6})^2 + \dfrac{1}{6}(x - \dfrac{x^3}{6})^3 + o(x^3)$ *soit :*

$h(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$

3.2.5 Primitive

Théorème 8
Si
- *f est une fonction continue au voisinage de 0*
- *f admet un $DL_n(0)$ $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$*
- *F est une primitive de f au voisinage de 0*

Alors
F admet un $DL_{n+1}(0)$ $F(x) = Q_{n+1}(x) + o(x^{n+1})$ avec $Q'_{n+1}(x) = P_n(x)$ et $Q_{n+1}(0) = F(0)$

Conséquence :

Théorème 9
Si *f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 et f' admet un $DL_{n-1}(0)$, $n \geq 1$ (par exemple c'est le cas si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0), $f'(x) = Q_{n-1}(x) + o(x^{n-1})$*
Alors *f admet un $DL_n(0)$, $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $P'_n = Q_{n-1}$*
avec $Q_{n-1} = P'_n$

4 Quelques développements limités au voisinage de 0

$\dfrac{1}{1-x}$	$=$	$\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$=$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$=$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$=$	$-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
e^x	$=$	$1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\cos x$	$=$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sin x$	$=$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha$	$=$	$1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
$\text{ch}x$	$=$	$1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\text{sh}x$	$=$	$x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$