Suites $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$

Quelques éléments d'étude des suites définies par récurrence (on dit aussi par itérations) de la forme : $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$ où f est une fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On détermine f et on étudie rapidement f.
2. On cherche $I \subset \mathbb{R}$, I intervalle tel que f soit définie sur I, $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$. De cette façon la suite $(u_n)_n$ est définie.
   De préférence on cherche I le plus petit possible (au sens de l'inclusion) fermé et tel que f soit monotone sur I.
3. On peut tracer la courbe représentative de f dans le plan ainsi que la droite d'équation $y = x$ puis représenter les premiers termes de la suite $(u_n)_n$ afin d'avoir une idée de son comportement.

Quelques résultats à utiliser pour étudier la suite $(u_n)_n$:

- **Si f est croissante sur I alors** la suite $(u_n)_n$ est monotone.
  . Si $u_1 - u_0 > 0$ Alors la suite est croissante.
  . Si $u_1 - u_0 < 0$ Alors la suite est décroissante.
  . Si $u_1 - u_0 = 0$ Alors la suite est constante.
  Reste à voir si $(u_n)_n$ est bornée pour déterminer si la suite est convergente.
  *par exemple : si la suite est croissante, $L \in I$, $f(L) = L$ et $u_0 \leq L$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq L$
- **Si f est décroissante sur I alors**
  les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de monotonies différentes.
  Si de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ alors les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes et alors la suite $(u_n)_n$ converge vers la limite commune à $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$
- **Limite éventuelle :**
  . Si $(u_n)_n$ converge et a pour limite L alors $L \in \overline{I}$
  (si $I =]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $[a, b]$, $\overline{I} = [a, b]$
  $I =]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$, $\overline{I} =]-\infty, a]$; $I = [a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$, $\overline{I} = [a, +\infty[$)
  . Si f est continue au point L, alors L vérifie $f(L) = L$.
  pour déterminer les limites éventuelles de la suite on résout l'équation : $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \\ x \in I \end{array} \right.$ et on étudie les extrémités de I qui n'appartiennent pas à I.

note :
ce qui précède n'est pas une étude exhaustive des suites $u_{n+1} = f(u_n)$. Ces quelques éléments permettent d'étudier la plupart des suites de ce type mais les exercices et la réflexion permettront de compléter cette feuille.