# TD 2

## Algèbre linéaire

$E$ désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

# Espaces vectoriels

**Exercice 1**

1. *$E$ désigne l'ensemble des polynômes à cœfficients dans $\mathbb{K}$ qui admettent $1$ pour racine, $E$ est-il un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles ? Si oui est-il de dimension finie ? Eventuellement en donner une base.*
2. *Soit $E$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $F_1$ les fonctions de $E$ solutions de l'équation différentielle $y^" - 2y' + 1 = 0$ et $F_2$ les fonctions de $E$ solutions de l'équation $y' - y^2 = 0$.*
   *$F_1$ et $F_2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E$ ? Si oui sont-il de dimension finie ? En donner alors une base.*

**Exercice 2**
*Soit $E$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$*

**Exercice 3** $E$=$\mathbb{R}^3$

1. *On note $a = (1, 2, 1)$, $b = (1, -1, 2)$, $c = (3, 0, 5)$, $d = (3, 3, 4)$. $F = vect < a, b >$ et $G = vect < c, d >$. Quelle est la nature de $F$ et $G$ ? Déterminer une équation cartésienne de $F$ et comparer $F$ et $G$.*
2. *Ici $a = (1, 1, -2)$, $b = (1, -2, 1)$ et $c = (-2, 1, 1)$. Quel est le rang de $(a, b, c)$ ? $u = (2, 3, 1)$ est-il combinaison linéaire de a,b et c ?Même question pour $v = (11, -10, -1)$, et pour $w_m = (2, 1, m)$ (discuter suivant les valeurs de $m$)*
3. *Soit $V = \{(x + 2y, 2x - y, x - y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que $V$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, quelle est sa dimension ? Donner une base de $V$.*

**Exercice 4** $E = \mathbb{R}^4$, *trouver le rang de la famille de vecteurs :*

$$\vec{a} = (3, 2, 1, 0), \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 5), \quad \vec{c} = (0, 1, 2, 3), \quad \vec{d} = (1, 2, 1, 2), \quad \vec{e} = (0, -1, 2, 1).$$

*(réponse* $\quad r = 3, \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}, \quad \vec{b} - 2\vec{d} - \vec{e} = \vec{0}.$*)*

# Sommes directes

**Exercice 5**
*Soit $F_1$, $F_2$, $F_3$ trois sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $F_1 + F_2 + F_3$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{\vec{0}\}$. Généraliser.*

**Exercice 6**
*Soit $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ supplémentaires et $F$ un autre sous-espace vectoriel de $E$, on note $F_1 = E_1 \cap F$ et $F_2 = E_2 \cap F$.*

1. *Montrer que la somme $G = F_1 + F_2$ est directe*
2. *Comparer $F$ et $G$.*

**Exercice 7**
*On suppose $E$ de dimension finie, on considère $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs de $E$ tels que*

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ p_i \circ p_j = p_j \circ p_i \quad \text{et} \quad p_1 + \ldots + p_n = \mathrm{id}_E$$

1. *Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \mathrm{tr}(p_i) = \mathrm{rg}(p_i)$.*
2. *Montrer que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.*

**Exercice 8** *Soit $S_1$ l'ensemble des polynômes $P$ tels que $P(1) = P'(1) = P"(1)$, et $S_2$ l'ensemble des polynômes de la forme $aX^2 + bX^3$. Montrer que $S_1$ et $S_2$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}[X]$*