TD de rentrée

Révisions de sup

Développements limités

Exercice 1 *A l'aide des développements limités en 0 de* $\frac{1}{1+u}$ *et* $(1+u)^\alpha$*, donner le développement limité à l'ordre* n *en 0 de* $\ln(1+u)$*,* $\ln(1-u)$*,* $\arctan(u)$ *et* $\arccos(u)$*.*

Exercice 2 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$*.*

1. *Montrer que* f *admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.*
2. *Montrer que* f *se prolonge en une fonction de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$*.*
3. *Déterminer la limite de* f *en* $+\infty$*.*

Exercice 3 *Donner un équivalent simple de* $\sin x - \arcsin x$ *en 0.*

Exercice 4 *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex$.

Nombres complexes

Exercice 5 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 + 2iz + i = 0$*.*

Exercice 6 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $(z+1)^n = e^{2ina}$*,* $a \in \mathbb{R}$*.*

Exercice 7 *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *calculer* $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kx)$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kx)$*.*

Exercice 8 *Soit* a, b *de module 1 tels que* $ab \neq -1$*. Montrer que* $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$*.*

Polynômes et fractions

Exercice 9 *Décomposer dans* $\mathbb{C}[X]$ *et dans* $\mathbb{R}[X]$ *les polynômes* X^5+1 *et* X^4+X^2+1*.*

Exercice 10 *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Le polynôme* X^2-2X+1 *divise-t-il* $X^{2n} - X^n - nX + n$ *?*

Exercice 11 *factoriser dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $P = 9X^3 - 30X^2 - 23X - 4$ *sachant qu'il a une racine multiple.*

Exercice 12 *Soit* $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P' - (X+1)P. \end{array}$

Montrer que : $\Phi \in L(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X])$ *et donner sa matrice dans les bases canoniques puis dans les bases* $(1, X-1, (X-1)^2)$ *et* $(1, X, X^2, X^3)$*.*

Déterminer $\ker\Phi$ *et* $\mathrm{Im}\Phi$*. Donner en une base.* Φ *est- elle injective ? surjective ?*

Exercice 13 Des exemples de décomposition en éléments simples.

1. *Trouver a et b tels que* $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\},\ \dfrac{2x+3}{x+2} = a + \dfrac{b}{x+2}$.
   En déduire la primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+2}$ *sur* $]-2,+\infty[$ *qui s'annule en 1.*
   Donner un développement limité à l'ordre n en 0 de f.
2. *Trouver a, b et c tels que* $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,-1\},\ \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$.
   En déduire la primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ *sur* $]-2,+\infty[$ *qui tend vers 0 en* $+\infty$.
3. *Trouver a, b et un polynôme P tels que* $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \dfrac{x^2(2+x)}{(x+1)^2} = P(x) + \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.
4. *Inspirez-vous des exemples précédents pour trouver des primitives de*

$$x \mapsto \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x^2(x-1)}$$

Divers

Exercice 14 *Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que* $|xy| \le \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$

Exercice 15 *Tracer le support de l'arc paramétré défini par* $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t. \end{cases}$
Donner sa longueur et calculer la courbure en chaque point régulier de l'arc.

Exercice 16 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle* $xy' - 2y = x^n$.

Exercice 17 *Calculer :*

1. *L'aire de l'ellipse d'équation :* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *dans un repère orthonormé.*
2. $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \iint_{\mathcal{C}(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *puis* $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \iint_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
   et en déduire $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-x^2}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\iint_\Delta y^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *où* $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < a \le x \le b, \quad 0 \le y \le 1\}$

Exercices de concours

Exercice 18 (CCP) *Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système* $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x^2+y^2+z^2 &= 9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} &= 1 \end{cases}$

Exercice 19 (Mines-Ponts) *Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant* $P(X^2) = P^2$.

Exercice 20 (CCP) *Soit I un intervalle, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable sur I et soit a, b dans I.*
Montrer que si $f'(a)f'(b) < 0$ alors f admet un extrêmum, atteint dans $]a, b[$.
En déduire que si f est dérivable sur un segment, f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 21 *(***CCP***) On considère une parabole $\mathcal{P}$ passant par O. Une droite de pente non nulle passant par le foyer F coupe $\mathcal{P}$ en deux points P et Q. On considère le centre du cercle circonscrit à (OPQ). Quel est le lieu de ces centres lorsque P et Q varient sur la parabole ?*

Exercice 22 (CCP) *Soit $\mathcal{P}$ une parabole et $\mathcal{D}$ une droite. Déterminer le lieu géométrique des milieux des cordes $[M, N]$ de $\mathcal{P}$ parallèles à $\mathcal{D}$.*