ESPACES VECTORIELS de DIMENSION FINIE

—

C. Susset

—

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Systèmes générateurs

1.1 Définition

Définition 1
On dit que la famille $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ de p vecteurs de E est génératrice dans E si et seulement si $\forall \vec{u} \in E, \exists (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p / \ \vec{u} = \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{u}_k$. On dit aussi que S est un système générateur de E

1.2 Propriétés

- $\mathbf{P_1}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de E ssi $E = vect < \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p >$.
- $\mathbf{P_2}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de E ssi $\forall \vec{u} \in E$ le système $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u} \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \end{array} \right.$ possède au moins une solution.
- $\mathbf{P_3}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de E ssi $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \rightarrow & E \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) & \mapsto & \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p \end{array}$ est surjective.
- $\mathbf{P_4}$: Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.
  Si $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_p)$ est une famille génératrice de E et $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une famille de E telle que $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_p\} \subset \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ alors $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une famille génératrice de E.

2 Systèmes libres

2.1 Définition

Définition 2 *On dit que la famille $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ de p vecteurs de E est libre dans E si et seulement si $\forall (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \ \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies x_1 = \cdots, x_p = 0$. On dit aussi que S est un système libre de E.*
Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite liée.

2.2 Propriétés

- $\mathbf{P_1}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \forall (\beta_1, \cdots, \beta_p) \in \mathbb{K}^p$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \vec{u}_k \Longrightarrow \forall k \in \{1, \cdots, p\}, \ \alpha_k = \beta_k$
- $\mathbf{P_2}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\forall \vec{u} \in E$ le système $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u} \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \end{array} \right.$ admet au plus une solution.
- $\mathbf{P_3}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \rightarrow & E \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) & \mapsto & \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p \end{array}$ est injective.
- $\mathbf{P_4}$: Soit $\vec{u}_1 \in E$, $S = (\vec{u}_1)$ est libre si et seulement si $\vec{u}_1 \neq 0$. $(\vec{0})$ est lié.
- $\mathbf{P_5}$: $S = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est liée si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{u}_1 = \lambda \cdot \vec{u}_2$ ou $\vec{u}_2 = \lambda \cdot \vec{u}_1$
- $\mathbf{P_6}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est liée si et seulement si il existe au moins un vecteur de S combinaison linéaire des autres vecteurs de S

- **P$_7$** : Soit $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ une famille libre et $\vec{u} \in E$.
  $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p, \vec{u})$ est libre si et seulement si $\vec{u} \notin vect < \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p >$.
- **P$_8$** : Toute famille de vecteurs extraite d'une famille libre est libre
- **P$_9$** : Toute famille de vecteurs contenant une famille liée est liée.
- **P$_{10}$** : Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

3 Bases

3.1 Définition

Définition 3 *On dit que la famille $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ de p vecteurs de E est une base de E si et seulement si S est libre et génératrice dans E.*

Exemple 1 *$(\vec{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ où $\vec{e}_k = (\delta_{i,k})_{1 \leq i \leq n}$ avec $\delta_{i,k} = 0$ pour $i \neq k$ et $\delta_{k,k} = 1$, est une base de $\mathbb{K}^n$, on l'appelle la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Théorème 1 *Soit $B = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E.*
B est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$.
$\forall \vec{u} \in E, \exists! (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n / \ \vec{u} = x_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + x_n \cdot \vec{u}_n$, $(x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base B.

3.2 Propriétés

- **P$_1$** : $S := (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall \vec{u} \in E$ le système $\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u} \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \end{array} \right.$ admet exactement une solution.
- **P$_2$** : $S := (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) & \mapsto & \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{u}_n \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
- **P$_3$** : Si $B := (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une base de E alors toute famille extraite de B est libre et toute famille de vecteurs contenant les vecteurs de B est génératrice.

4 Espaces vectoriels de dimension finie

4.1 Dimension finie

Définition 4 *On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie sur K si et seulement si E admet une famille génératrice finie.*
E est de dimension finie si et seulement si $\exists (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p) \in E^p$ tel que $E = vect < \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p >$

Exemple 2 *$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est de dimension finie.*

Théorème 2 *Tout espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}\}$ et de dimension finie admet au moins une base.*

par convention : $\{\vec{0}\}$ est de dimension finie et admet pour base $\emptyset$

Théorème 3 (théorème de la dimension) *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre est la dimension de E.*

Par convention $\{\vec{0}\}$ a pour dimension 0. On appelle droite vectorielle tout espace vectoriel de dimension 1 et plan vectoriel tout espace vectoriel de dimension 2.

Théorème 4 *E est de dimension n si et seulement si il existe un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E.*

4.2 Familles libres et génératrices en dimension n

Théorème 5 *Si* $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ *est un système générateur de* E *alors* S *contient une base de* E*.*

Conséquence : $p \geq n$ où $n = \dim E$ et si $p = n$ alors S est une base de E

Théorème 6 (théorème de la base incomplète) *Si* $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ *est un système libre de* E *alors il existe une base de* E *qui contient* S*.*

Conséquence : $p \leq n$ où $n = \dim E$ et si $p = n$ alors S est une base de E

Théorème 7 *Si* $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ *est une famille de* p *vecteurs de* E *on a l'équivalence entre les trois proppiétés suivantes :*

1. S *est une base de* E
2. S *est générateur de* E *et* $p = n$
3. S *est libre dans* E *et* $p = n$

4.3 Sous espaces vectoriels

Proposition 1 *Soit F un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E. On a :*

1. *F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$
2. *E=F si et seulement si* $\dim E = \dim F$

5 Sous espaces supplémentaires

Théorème 8 *Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.*
F et G sont supplémentaires si et seulement si

1. $F \cap G = \{\vec{0}\}$
2. $\dim E = \dim F + \dim G$

Théorème 9 *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *F et G sont supplémentaires dans E*
2. $F + G = E$ *et* $\dim F + \dim G = \dim E$
3. *Il existe* $B_1 = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ *une base de* F *et il existe* $B_2 = (\vec{u}_{p+1}, \cdots, \vec{u}_{p+q})$ *une base de* G *telles que* $B = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_{p+q})$ *est une base de E.*

Théorème 10 *Si E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E alors F admet au moins un supplémentaire dans E.*

Théorème 11 *Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a :* $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

Théorème 12 *Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E.*
F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$