ESPACES VECTORIELS

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Définitions

Soit E un ensemble non vide

Définition 1 *On appelle $\mathbb{K}$ espace vectoriel, un ensemble E non vide muni de deux lois notées $+$ et $\cdot$:*
$+$ et $\cdot$ vérifient :

1. *$(E,+)$ est un groupe commutatif :*
   - $\forall (x,y) \in E^2 \quad x+y \in E$ *(+ est une loi interne)*
   - $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ *(est une loi associative)*
   - $\forall (x,y) \in E^2 \quad x+y = y+x$ *(+ est une loi commutative)*
   - $\exists e \in E \quad tq \quad \forall x \in E \quad e+x = x+e$ *(+ possède un élément neutre)* *e se note souvent O_E ou $\overrightarrow{O}$*
   - $\forall x \in E \quad \exists x' \in E \quad tq \quad x+x' = x'+x = O_E$ *(tout élément possède un symétrique)* *x' se note $-x$*
2. *la loi externe $\cdot$ vérifie :*
   - $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad \lambda \cdot x \in E$ *($\cdot$ est une loi externe)*
   - $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x,y) \in E^2$:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\mu \cdot x) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot x \\ (\lambda+\mu) \cdot x &= \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \lambda \cdot (x+y) &= \lambda \cdot x + \mu \cdot y \\ 1 \cdot x &= x \end{aligned}$$

Les éléments de $(E,+,\cdot)$ sont appelés des vecteurs, $x \in E$ se note $\overrightarrow{x}$
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Définition 2 *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et F une partie de E. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si F est non vide et $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

Proposition 3 *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et F une partie de E.*
F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

1. *$F \neq \emptyset$*
2. *$\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x+\lambda \cdot y \in F$*

Dans la suite $(E,+,\cdot)$ désignera un $\mathbb{K}$ espace vectoriel noté simplement E

2 Règles de calculs

- $\forall \overrightarrow{x} \in E \quad 0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
- $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ *ou* $\vec{x} = \vec{0}$
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{K} \times E \quad \alpha \cdot (-\vec{x}) = (-\alpha) \cdot \vec{x} = -(\alpha \cdot \vec{x})$

3 Applications linéaires

Définition 4 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels,*
on appelle application linéaire de E dans F toute application f de E dans F telle que :
$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{E}^2, \forall\lambda \in \mathbb{K},\ f(\vec{x},+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ *et* $f(\lambda\cdot\vec{x}) = \lambda\cdot f(\vec{x})$

On note $\mathbf{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Si $E = F$ les éléments de $L(E,F)$ s'appellent des **endomorphismes** de E et on note $\mathbf{L(E)} = \mathbf{L(E,F)}$
Si $f \in L(E,F)$ et f est bijective on dit que f est un **isomorphisme**, on note $\mathbf{GL(E,F)}$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F
Si $f \in L(E)$ et f est bijective on dit que f est un **automorphisme**, on note $\mathbf{GL(E)}$ l'ensemble des automorphismes de E

Proposition 5 $(L(E,F),+,\cdot)$ *et* $(L(E),+,\cdot)$ *sont deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.*

! $\mathbf{GL(E,F)}$ et $\mathbf{GL(E)}$ ne sont pas des sous espaces vectoriels de $(\mathbf{L(E,F)},+,\cdot)$ et $(\mathbf{L(E)},+,\cdot)$

Définition 6 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$.*
- *On appelle* **noyau** *de f la partie de E notée* $\mathbf{ker}f$ *et définie par* $\mathbf{ker}f =^{-1} f(0_F) = \{\vec{x} \in E, f(\vec{x}) = 0_F\}$
- *On appelle* **image** *de f la partie de F notée* $\mathbf{Im}\ f$ *et définie par* $\mathbf{Im}\ f = f(E) = \{\vec{y} \in F\ tq\ \exists\vec{x} \in E\ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

Proposition 7 *Soit $f \in L(E,F)$,* $\mathbf{ker}f$ *est un sous espace vectoriel de E et* $\mathbf{Im}f$ *est un sous espace vectoriel de F*

4 Combinaisons linéaires

Soit $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
Le vecteur de E, $\vec{x} = \displaystyle\sum_1^n \lambda_i\vec{x}_i$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$

Proposition 8 *Soit* $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p$ *p vecteurs de E.*
L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p$ est un sous espace vectoriel de E.

On note $\mathbf{vect} < \vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p >= \{\vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i\vec{x}_i,\ (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p\}$

Proposition 9 *Soit $A \subset E$, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E au sens de l'inclusion contenant A. Ce sous-espace vectoriel est unique, il s'appelle le sous espace vectoriel engendré par A, on le note vect $< A >$ on a :*

$$vect < A >= \bigcap_{\substack{F\subset E\\ F\ sev}} F \qquad et \qquad vect < A >= \{\sum_{finie} \lambda_i\cdot\vec{x}_i,\ \vec{x}_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\ \forall i\}$$
.

Remarque 10 $\mathbf{vect} < \vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p >= \mathbf{vect} < \{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\} >$
$\mathbf{vect} < \vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p >$ *est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p$.*

Proposition 11 *Soit* $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p$ *p vecteurs de E et F un sous espace vectoriel de E.*
<u>Si</u> $\forall i \in \{1, \ldots, p\}\}$, $\vec{x}_i \in F$ *<u>alors</u>* **vect** $< \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p > \subseteq F$.

Propriété 12 *Soit F=***vect**$< \vec{x}_i >_{i \in I}$ *et G=***vect**$< \vec{y}_j >_{j \in J}$ *deux sous espaces vectoriels de E engendrés respectivement par* $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ *et* $(\vec{y}_j)_{j \in J}$
Si $\forall i \in I$ $\vec{x}_i \in G$ *alors* $F \subset G$
Si $\forall i \in I$ $\vec{x}_i \in G$ *et* $\forall j \in J$ $\vec{y}_j \in F$ *alors* $F = G$

Proposition 13 *Soit* $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p$ *p vecteurs de E et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *des scalaires.*
- $vect < \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p >= vect < \vec{x}_1, \vec{x}_2 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p + \lambda_p \cdot \vec{x}_1 >$
- $vect < \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_p >= vect < \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_p >$
- *Si* $\lambda_i \neq 0$ $\quad vect < \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots \vec{x}_p >= vect < \vec{x}_1, \cdots, \lambda_i \cdot \vec{x}_i, \cdots \vec{x}_p >$

Ces propriétés seront utilisées dans le chapitre des espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition 14 $vect < A >$ *est un sous espace vectoriel de E, et si* $A \subset F$ *avec F sous espace vectoriel de E alors* $vect < A > \subset F$. $vect < A >$ *est le sous espace vectoriel de E engendré par A.*

5 Somme de sous espaces vectoriels

5.1 Définition

Définition 15 *Soit* E_1 *et* E_2 *deux sous espaces vectoriels de E.*
On appelle somme des sous espaces vectoriels E_1 *et* E_2 *et on note* $E_1 + E_2$ *la partie de E définie par :*
$E_1 + E_2 = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in E,\ \vec{x}_1 \in E_1$ *et* $\vec{x}_2 \in E_2\}$

Proposition 16 $E_1 + E_2$ *est un sous espace vectoriel de E, c'est le sous espace vectoriel engendré par* $E_1 \cup E_2$ $E_1 + E_2 = vect < E_1 \cup E_2 >$

5.2 Somme directe

Définition 17 *Soit* E_1 *et* E_2 *deux sous espaces vectoriels de E. On dit que* E_1 *et* E_2 *sont en somme directe si et seulement si* $\forall \vec{x} \in E_1 + E_2,\ \exists!(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ *tq* $\quad \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.
On note $E_1 \oplus E_2$ *la somme des deux sous espaces* E_1 *et* E_2 *lorsque celle-ci est directe.*

Proposition 18 *Soit* E_1 *et* E_2 *deux sous espaces vectoriels de E.*
E_1 *et* E_2 *sont en somme directe si et seulement si* $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

5.3 Espaces supplémentaires

Définition 19 *Deux sous espaces vectoriels de E sont dits supplémentaires si et seulement si* $E = E_1 \oplus E_2$

Proposition 20 *Deux sous espaces vectoriels* E_1 *et* E_2 *de E sont supplémentaires si et seulement si*
1. $\forall \vec{x} \in E,\ \exists(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ *tq* $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
2. $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

5.4 Somme de p sous espaces vectoriels

Pour $E_1, \cdots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E on définit :
$E_1 + \cdots + E_p = vect < E_1 \cup \cdots \cup E_p >= \{\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p \in E,\ (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p\}$

Définition 21 *Soit $E_1, \cdots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E. On dit que $E_1, \cdots, E_p$ sont en somme directe si et seulement si : $\forall \vec{x} \in E_1 + \cdots + E_p$, il existe une unique famille $(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad tq \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \vec{x}_i$*
on note $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$

Proposition 22 *$E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ si et seulement si $\forall (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_p) \in E_1 \times \cdots E_p,\ \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_p = \vec{0}$*

5.5 Somme d'espaces vectoriels et applications linéaires

5.5.1 Définition d'application linéaire

Proposition 23 *Soit E_1 et E_2 deux sous espaces supplémentaires de E, F un espace vectoriel, u_1 et u_2 deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E_1, F)$ et $\mathcal{L}(E_2, F)$ respectivement.*
Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que les restrictions de u à E_1 et E_2 respectivement sont u_1 et u_2, $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$

On a un résultat similaire si E est la somme de p sous espaces vectoriels.

Proposition 24 *Soit $E_1, E_2 \cdots E_p$ p sous espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2 \cdots \oplus E_p$, F un espace vectoriel, $u_1, u_2 \cdots u_p$ p applications linéaires de $\mathcal{L}(E_1, F), \mathcal{L}(E_2, F) \cdots \mathcal{L}(E_p, F)$respectivement*
Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que les restrictions de u à E_1,$E_2 \cdots E_p$ soient respectivement $u_1, u_2 \cdots u_p$, $u_{|E_1} = u_1,\ u_{|E_2} = u_2 \cdots u_{|E_p} = u_p$

On détermine une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ et ses propriétés en étudiant ses rectrictions à des sous espaces vectoriels en somme directe dont la somme est E.

Remarque 25 *On utilisera la proposition précédente pour l'étude des endomorphismes plutôt sous la forme suivante :*

Proposition 26 *Soit $E_1, E_2 \cdots E_p$ p sous espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2 \cdots \oplus E_p$, $u_1, u_2 \cdots u_p$ p applications linéaires de $\mathcal{L}(E_1), \mathcal{L}(E_2) \cdots \mathcal{L}(E_p)$ respectivement*
Il existe un unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les restrictions de u à E_1,$E_2 \cdots E_p$ soient respectivement $u_1, u_2 \cdots u_p$, $u_{|E_1} = u_1,\ u_{|E_2} = u_2 \cdots u_{|E_p} = u_p$

5.5.2 Projections vectorielles

Définition 27

Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E, $E = E_1 \oplus E_2$
Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1),\ \forall \vec{x} \in E_1,\ u_1(\vec{x}) = \vec{x}$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2),\ \forall \vec{x} \in E_2,\ u_2(\vec{x}) = \vec{0}$
On appelle projection vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique endomorphisme p de E dont les restrictions à E_1 et E_2 sont respectivement u_1 et u_2
$\forall \vec{x} \in E$ avec $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2},\ (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$, on a : $p(\vec{x}) = \vec{x_1}$
$E_1 = \ker(p - Id)$ et $E_2 = \ker p$

Théorème 28 *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, p est une projection vecorielle si et seulement si $p = p \circ p$.*

On a alors $E = \mathrm{Imp} \oplus \ker \mathrm{p}$ avec $\mathrm{Imp} = \ker(\mathrm{p} - \mathrm{id})$ et p est la projection vectorielle sur Imp parallèlement à $\ker p$.

5.5.3 Symétries vectorielles

Définition 29

Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E, $E = E_1 \oplus E_2$

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1),\ \forall \vec{x} \in E_1,\ u_1(\vec{x}) = \vec{x}$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2),\ \forall \vec{x} \in E_2,\ u_2(\vec{x}) = \vec{-x}$

On appelle symétrie vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique endomorphisme s de E dont les restrictions à E_1 et E_2 sont respectivement u_1 et u_2
$\forall \vec{x} \in E$ avec $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2},\ (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$, on a : $s(\vec{x}) = \vec{x_1} - \vec{x_2}$
$E_1 = \ker(s - Id)$ et $E_2 = \ker(s + Id)$

Théorème 30 *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$, s est une symétrie vectorielle si et seulement si $s \circ s = Id$.*

On a alors $E = \ker(s - Id) \oplus \ker(s + Id)$, s est la symétrie vectorielle sur $\ker(s - Id)$ parallèlement à $\ker(s + Id)$.

5.5.4 Affinités vectorielles

Définition 31

Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E, $E = E_1 \oplus E_2$ et $a \in \mathbb{K}$.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1),\ \forall \vec{x} \in E_1,\ u_1(\vec{x}) = \vec{x}$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2),\ \forall \vec{x} \in E_2,\ u_2(\vec{x}) = a\vec{x}$

On appelle affinité vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2 de rapport a, l'unique endomorphisme f de E dont les restrictions à E_1 et E_2 sont respectivement u_1 et u_2
$\forall \vec{x} \in E$ avec $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2},\ (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$, on a : $f(\vec{x}) = \vec{x_1} + a\vec{x_2}$
$E_1 = \ker(f - Id)$ et $E_2 = \ker(f - aId)$