

# DEVELOPPEMENTS LIMITES

—  
C. Susset  
—

## 1 Définitions

Voici quelques notions utiles pour étudier une fonction numérique au voisinage d'un point et donc pour aborder les développements limités.

### 1.1 Voisinage d'un point

#### Définition 1

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on appelle *voisinage de  $a$*  toute partie  $V \subset \mathbb{R}$  contenant un intervalle ouvert contenant  $a$ .

**Définition 2** Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on appelle *voisinage à droite* (resp. *gauche*) de  $a$  toute partie  $V \subset \mathbb{R}$  contenant un intervalle ouvert de la forme  $]a, \alpha[$ ,  $a < \alpha$  (resp.  $]\alpha, a[$ ,  $\alpha < a$ ),  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Noter que dans cette définition  $a$  n'appartient pas nécessairement au voisinage à droite ou à gauche.

**Définition 3** On appelle *voisinage de  $+\infty$*  (resp.  *$-\infty$* ) toute partie de  $\mathbb{R}$  contenant un intervalle de la forme  $]\alpha, +\infty[$  (resp.  $]-\infty, \alpha[$ ),  $\alpha \in \mathbb{R}$

Notation :  $\overline{\mathbb{R}}$  désignera l'ensemble  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Pour  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  on désignera par  $\mathcal{V}_a$  (resp.  $\mathcal{V}_a^+$ ,  $\mathcal{V}_a^-$ ) l'ensemble des voisinages (resp. voisinage à droite, à gauche) de  $a$ .

### 1.2 Etude au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

**Définition 4** On dit qu'une fonction numérique de la variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) est définie au voisinage d'un point  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  si et seulement si l'ensemble de définition de la fonction contient un voisinage de  $a$

**Définition 5** On dit qu'une fonction numérique de la variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est définie sur *voisinage à droite* (resp. *à gauche*) d'un point  $a \in \mathbb{R}$  si et seulement si l'ensemble de définition de la fonction contient un *voisinage à droite* (resp. *à gauche*) de  $a$

Pour une fonction numérique de la variable réelle  $f$  et  $a \in \mathbb{R}$  on pose  $f_a(h) = f(a+h)$ .  $f$  est définie au voisinage de  $a$  si et seulement si  $f_a$  est définie au voisinage de 0. Etudier  $f$  au voisinage de  $a$  est équivalent à étudier  $f_a$  au voisinage de 0.

Pour une fonction numérique de la variable réelle  $f$  et  $a = +\infty$  (resp.  $a = -\infty$ ) on pose  $f_a(h) = f(\frac{1}{h})$ .  $f$  est définie au voisinage de  $a$  si et seulement si  $f_a$  est définie sur un voisinage à droite de 0 (resp. à gauche de 0). Etudier  $f$  au voisinage de  $a$  est équivalent à étudier  $f_a$  sur un voisinage à droite de 0 (resp. à gauche de 0).

Dans la suite les fonctions considérées seront des fonctions numériques de la variable réelle définies au voisinage de 0 sauf peut-être en 0, le lecteur adaptera les définitions et les résultats pour une fonction définie sur un voisinage à droite ou à gauche de 0.

## 1.3 Comparaison des fonctions

### 1.3.1 Domination

**Définition 6** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de 0, on dit que  $f$  est *dominée* par  $g$  (on dit parfois que  $f$  est *bornée* devant  $g$ ) au voisinage de 0 si et seulement si il existe un voisinage  $V$  de 0 et un réel  $M > 0$  tel que  $\forall x \in V$ ,  $|f(x)| \leq M|g(x)|$

On note :  $f \preceq g$  (notation de Hardy), ou  $f = O(g)$  (notation de Landau)

**Définition 7** On dit qu'une fonction  $f$  est *bornée* au voisinage de 0 si et seulement si  $f = O(1)$ , c'est à dire qu'il existe  $M > 0$  et un voisinage  $V$  de 0 tel que  $\forall x \in V$ ,  $|f(x)| \leq M$

**Proposition 1** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de 0, on suppose que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de 0, sauf peut-être en 0 et si  $g(0) = 0$  alors  $f(0) = 0$ .  $f = O(g)$  si et seulement si  $\frac{f}{g}$  est une fonction bornée au voisinage de 0

### 1.3.2 Prépondérance

**Définition 8** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $0$ , on dit que  $f$  est négligeable devant  $g$ , ou que  $g$  est prépondérante devant  $f$  au voisinage de  $0$  si et seulement si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un voisinage  $V$  de  $0$  tel que  $\forall x \in V, |f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$ .

On note :  $f \ll g$  (notation de Hardy), ou  $f = o(g)$  (notation de Landau)

**Définition 9** On dit qu'une fonction  $f$  a pour limite  $0$  en  $0$  si et seulement si  $f = o(1)$ , c'est à dire que  $\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_0, \forall x \in V, |f(x)| \leq \epsilon$

On note :  $\lim_0 f = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Proposition 2** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $0$ , on suppose que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $0$ , sauf peut-être en  $0$  et si  $g(0) = 0$  alors  $f(0) = 0$ . On a l'équivalence suivante :

$f = o(g)$  si et seulement si  $\lim_0 \frac{f}{g} = 0$

### 1.3.3 Equivalence

**Définition 10** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $0$ , on dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $0$  si et seulement si  $f - g = o(g)$

On note :  $f \sim g$

**Proposition 3** On a :  $f \sim g$  si et seulement si  $g \sim f$ .

**Définition 11** On dit qu'une fonction  $f$  a pour limite  $l, l \in \mathbb{R}^*$  en  $0$  si et seulement si  $f \sim l$ , c'est à dire que  $\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_0, \forall x \in V, |f(x) - l| \leq \epsilon$

On note :  $\lim_0 f = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$

**Proposition 4** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $0$ , on suppose que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $0$ , sauf peut-être en  $0$  et si  $g(0) = 0$  alors  $f(0) = 0$ . On a l'équivalence suivante :  $f \sim g$  si et seulement si

$\lim_0 \frac{f}{g} = 1$

## 2 Développements limités

Les développements limités permettent de préciser le comportement d'une fonction numérique au voisinage d'un point. S'il n'y a pas d'indication les fonctions considérées seront des fonctions numériques à valeurs dans  $\mathbb{K}$  définies au voisinage de  $0$ .

### 2.1 Définition

**Définition 12** La fonction  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) au voisinage de  $0$  (on notera  $f$  admet un  $DL_n(0)$ ) si et seulement si, il existe un polynôme  $P_n$  de degré inférieur ou égal à  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$   $a_k \in \mathbb{K}, k \in \{0, \dots, n\}$  tel que au voisinage de  $0$ ,  $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ .

**Définition 13** Si la fonction  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $0$ ,  $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ , le polynôme  $P_n$  s'appelle partie régulière du développement limité de  $f$  à l'ordre  $n$  en  $0$ , on dit aussi développement limité de  $f$  à l'ordre  $n$  en  $0$ .

**Remarque 1** Suivant le contexte l'expression "développement limité de  $f$  à l'ordre  $n$ " désigne aussi bien l'égalité :  $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$  que le polynôme  $P_n$ .

**Exemple 1**  $e^{it} = 1 + it + o(t)$  est un  $DL_1(0)$

**Proposition 5****Si** $f$  admet un  $DL_n(0)$ **Alors**

- Celui-ci est unique c'est à dire que le polynôme  $P_n$  est unique.
- $f$  admet un  $DL_k(0)$ ,  $\forall k \leq n$ , celui-ci est obtenu en prenant le reste de la division euclidienne du développement de  $f$  par  $X^{k+1}$

**Définition 14** Si  $f$  admet un  $DL_n(0)$ ,  $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$  avec  $P_n(x) = a_p x^p + \dots + a_n x^n$ ,  $p \leq n$ ,  $a_p \neq 0$ ,  $p$  est la valuation de  $P_n$  et  $a_p x^p$  est la partie principale du développement limité.

**Proposition 6**

1.  $f$  admet un  $DL_0(0)$  si et seulement si  $\lim_0 f$  existe dans  $\mathbb{K}$ , on a alors  $f(x) = \lim_0 f + o(1)$
2.  $f$  admet un  $DL_1(0)$  si et seulement si  $f$  est dérivable en 0, on a alors  $f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x)$

**Remarque 2**

1. On peut parler de  $DL(0)$  même si  $f(0)$  n'existe pas du moment que  $f$  est définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0 on a alors :
  - $f$  admet un  $DL_0(0)$  si et seulement si  $f$  se prolonge par continuité en 0
  - $f$  admet un  $DL_1(0)$  si et seulement si  $f$  se prolonge par continuité en 0 et le prolongement est dérivable en 0.
2. Pour  $n \geq 2$ ,  $f$  peut admettre un  $DL_n(0)$  sans que  $f^{(n)}(0)$  existe. Exemple :  $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$  admet un  $DL_2(0)$  mais  $f^{(2)}(0)$  n'existe pas.

### 3 Propriétés

#### 3.1 Fonctions de classe $C^n$

Formule de Taylor avec reste de Young

**Théorème 1**Si  $f$  est de classe  $C^n$  au voisinage de 0Alors  $f$  admet un  $DL_n(0)$  et  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n)$ .**Remarque 3**  $f$  définie et de classe  $C^n$  au voisinage de  $a$  admet un  $DL_n(a)$  car  $g(h) = f(a+h)$  admet un $DL_n(0)$  et on a :  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$ **Remarque 4** En fait le théorème s'applique avec des hypothèses plus faibles :**Théorème 2**Si  $f^{(n-1)}$  est définie au voisinage de 0 et  $f^{(n)}(0)$  existeAlors  $f$  admet un  $DL_n(0)$  et  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n)$ .**Remarque 5** On peut parfois alléger les calculs, c'est à dire économiser un terme dans le développement en utilisant le théorème suivant :**Théorème 3**Si  $f$  est de classe  $C^n$  au voisinage de 0Alors  $f$  admet un  $DL_{n-1}(0)$  et  $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + O(x^n)$ .

On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n-1$  au sens "fort". Une fonction qui est un  $O(x^n)$  est un  $o(x^{n-1})$ . De façon imagée, en terme de "rapidité" de convergence un  $o(x^{n-1})$  converge vers 0 moins "vite" qu'un  $O(x^n)$  qui lui-même converge moins "vite" qu'un  $o(x^n)$

### 3.2 Opérations sur les DL

#### 3.2.1 Addition

##### Théorème 4

Si

$$- f \text{ admet un } DL_n(0), \quad f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$- g \text{ admet un } DL_n(0), \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Alors

$$f + g \text{ admet un } DL_n(0) \quad (f + g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + o(x^n)$$

Le développement limité de  $f + g$  en 0 à l'ordre  $n$  est la somme des développements limités de  $f$  et  $g$  à l'ordre  $n$

#### 3.2.2 Multiplication

##### Théorème 5

Si

$$- f \text{ admet un } DL_n(0), \quad f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$- g \text{ admet un } DL_n(0), \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Alors

$f \cdot g$  admet un  $DL_n(0)$   $(f \cdot g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$  où  $R_n$  est le reste de la division euclidienne de  $P_n \cdot Q_n$  par  $X^{n+1}$ .

**Exemple 2** Déterminer le  $DL_5(0)$  de la fonction  $h(x) = (1 - \cos(x)) \cdot \ln(1 + x)$ .

On a :

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

$$P_5 \cdot Q_5(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + o(x^5)$$

$$h(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + o(x^5)$$

#### 3.2.3 Rapport

##### Théorème 6

Si

$$f \text{ admet un } DL_n(0), \quad f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$g \text{ admet un } DL_n(0), \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

$$g(0) \neq 0$$

Alors  $\frac{f}{g}$  admet un  $DL_n(0)$   $\frac{f(x)}{g(x)} = R_n(x) + o(x^n)$  où  $R_n$  est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre  $n$  de  $P_n$  par  $Q_n$ .

**Exemple 3** Déterminer le  $DL_5(0)$  de  $\tan$

on a :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5\right) + o(x^5) \quad \text{de sorte que :}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

### 3.2.4 Composée

#### Théorème 7

Si

$f$  admet un  $DL_n(0)$ ,  $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

$g$  admet un  $DL_n(0)$ ,  $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$g(0) = 0$

Alors  $f \circ g$  admet un  $DL_n(0)$ ,  $f \circ g(x) = R_n(x) + o(x^n)$  où  $R_n$  est le reste de la division euclidienne de  $P_n \circ Q_n(X)$  par  $X^{n+1}$ .

**Exemple 4**  $h(x) = e^{\sin(x)}$ , déterminer le  $DL_3(0)$  de  $h$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{d'où :}$$

$$h(x) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \quad \text{soit :}$$

$$h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

### 3.2.5 Primitive

#### Théorème 8

Si

-  $f$  est une fonction continue au voisinage de 0

-  $f$  admet un  $DL_n(0)$   $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

-  $F$  est une primitive de  $f$  au voisinage de 0

Alors

$F$  admet un  $DL_{n+1}(0)$   $F(x) = Q_{n+1}(x) + o(x^{n+1})$  avec  $Q'_{n+1}(x) = P_n(x)$  et  $Q_{n+1}(0) = F(0)$

Conséquence :

#### Théorème 9

Si  $f$  est de classe  $C^1$  au voisinage de 0 et  $f'$  admet un  $DL_{n-1}(0)$ ,  $n \geq 1$  (par exemple c'est le cas si  $f$  est de classe  $C^n$  au voisinage de 0),  $f'(x) = Q_{n-1}(x) + o(x^{n-1})$

Alors  $f$  admet un  $DL_n(0)$ ,  $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$  et  $P'_n = Q_{n-1}$

avec  $Q_{n-1} = P'_n$

## 4 Quelques développements limités au voisinage de 0

$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$e^x$	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sin x$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\operatorname{sh} x$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$