NOMBRES REELS et NOMBRES COMPLEXES

I-Propriétés de $\mathbb{R}$:

1) Définitions:

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

* A est majorée s'il existe $M\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in A\ \ x\leq M$ on dit alors que A est majorée et M est un majorant de A.

* A est minorée s'il existe $m\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in A\ \ x\geq m$ on dit alors que A est minorée et m est un minorant de A.

* A est bornée si A est majorée et minorée ce qui est équivalent à dire qu'il existe $(m,M)\in\mathbb{R}^2$ tq $A\subset[m,M]$.

* A admet un plus grand élément s'il existe $M\in\mathbb{R}$ tq 1) $M\in A$ 2) M est un majorant de A on note $M=\mathbf{Max(A)}$.

* A admet un plus petit élément s'il existe $m\in\mathbb{R}$ tq 1) $m\in A$ 2) m est un minorant de A on note $m=\mathbf{min(A)}$.

***On appelle borne supérieure de A si elle existe le plus petit des majorants de A on note **Sup(A)** cette borne supérieure.

***On appelle borne inférieure de A si elle existe le plus grand des minorants de A on note **Sup(A)** cette borne inférieure.

Théorème: Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

propriétés: Lorsqu'ils existent **Sup(A) , Inf(A) , Max(A) , Min(A)** sont uniques

Lorsque **Max(A)** existe alors **Sup(A)=Max(A) ,** Lorsque **Min(A)** existe alors **Inf(A)=Min(A)**

Lorsque A est majorée alors [**Sup(A)**,$+\infty$[est l'ensemble des majorants de A.

Lorsque A est minorée alors]$-\infty$,**Inf(A)**] est l'ensemble des minorants de A.

2) Partie entière:

Définition: $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists! n\in\mathbb{Z}$ tq $n \leq x < n+1$, n est la partie entière de x on note $\mathbf{E}(x)=n$ ou $[x]=n$

Propriétés: $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathbf{E}(x) \leq x < \mathbf{E}(x)+1$, pour $n\in\mathbb{N}$ $\mathbf{E}(x+n)=\mathbf{E}(x)+n$ $\mathbf{E}(x+y)\geq\mathbf{E}(x)+\mathbf{E}(y)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

II-Propriétés de $\mathbb{C}$:

$\mathbb{C}=\{a + ib,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ $i^2=-1$

Forme algébrique:

Soit $z\in\mathbb{C}$ $\exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tq $z = a + ib$ c'est la forme algébrique de z

a est la partie réelle de z et b est la partie imaginaire. On note $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$

$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$

Opérations: Soit $z = a + ib$ et $z' = a'+ib'$ deux nombres complexes.

Somme: $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

Produit: $z.z' = (aa'-bb') + i(ab'+ba')$

Inverse: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ $z\neq 0$

conjugué: $\bar{z} = a - ib$ propriétés $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$; $\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

module: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ propriétés $|z+z'| \leq |z| + |z'|$; $|z.z'| = |z|.|z'|$; $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $(z'\neq 0)$; $|z^n| = |z|^n$ $(n\in\mathbb{Z})$

$$|z|^2 = z.\bar{z} \quad ; \quad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad ; \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$$

Forme trigonométrique:

Soit $z\in\mathbb{C}^*$, $\exists!(\rho,\theta)\in]0,+\infty[\times]-\pi,+\pi]$ tq $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\rho = |z|$ $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}\,z}{|z|}$ $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}\,z}{|z|}$

Notation exponentielle: $z = \rho e^{i\theta}$

L'argument de z est l'angle de mesure θ , θ est la mesure principale de l'argument ($\theta\in]-\pi,+\pi]$).

Si $z = \rho(\cos\theta'+i\sin\theta')$ Alors $\exists k\in\mathbb{Z}$ tq $\theta'=\theta+2k\pi$ on note $\theta' \equiv \theta\ [2\pi]$

Propriétés:

$Arg(z.z') = Arg(z) + Arg(z')$; $Arg(\frac{z}{z'}) = Arg(z) - Arg(z')$; $(\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$; $\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$; $\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$

$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg z = \arg z'$

Formule de Moivre:

$\forall (n,\theta) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ soit $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Exemple d'utilisation:

$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ en développant permet de déterminer $(a_k)_k$ tq $\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k\theta$

Formules d'Euler:

$\forall\theta \in \mathbb{R}$ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Exemple d'utilisation: on développe $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ ou $\sin^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$ ce qui permet de déterminer $(a_k)_k$ ou $(b_k)_k$ tq $\cos^n\theta = \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\theta)$ ou $\sin^n\theta = \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(k\theta)$ et d'une manière générale on peut linéariser $\cos^p\theta\sin^q\theta$, par exemple pour déterminer une primitive

Racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité:

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ l'équation $z^n=1$ possède n solutions dans $\mathbb{C}$, $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$ ce sont les racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité

Propriétés: pour $k\in\mathbb{Z}$ posons $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

* $w_{k+n} = w_k$ * $w_k.w_{k'} = w_{k+k'}$ * $w_0 = w_n = 1$ * $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$ * $\forall k \in \{1,\cdots,n-1\}$ $\sum_{p=0}^{n-1}(w_k)^p = 0$

racines cubiques de l'unité: 1, j, j^2 avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ propriétés: $j^3 = 1$, $j^2 = \bar{j}$, $1 + j + j^2 = 0$

Racines n$^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe:

Un nombre complexe non nul possède n racines n$^{\text{ième}}$ on obtient ces racines en multipliant l'une d'elle par les racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité. si $w = \rho e^{i\theta}$ $z^n=w$ a pour solutions dans $\mathbb{C}$ $z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $k \in \{0,\cdots,n-1\}$

Racines carrées d'un nombre complexe:

Un nombre complexe W non nul admet deux racines carrées δ et -δ

Forme trigonométrique: Si $W=\rho e^{i\theta}$ Alors $\delta = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

Forme algébrique: Si $W = a+ib$ Alors $\delta = x+iy$ avec (x,y) solution du système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ xy.b \geq 0 \end{cases}$

Equation du 2$^{\text{ième}}$ degré: $az^2 + bz + c = 0$, $z \in \mathbb{C}$ $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ $a \neq 0$

Résolution: discriminant: $\Delta = b^2 - 4ac$ soit alors δ une racine carrée de Δ les solutions sont alors:

$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$

Notation: $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$

III-Sommes et Produits:

Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ des nombres de $\mathbb{K}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$

Somme: * $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$ * $\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$ * $\sum_{i=1}^{n}\lambda = n\lambda$

Produit: * $\prod_{i=1}^{n}(x_i y_i) = \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{i=1}^{n} y_i$ * $\prod_{i=1}^{n}(\lambda x_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} x_i$ * $\prod_{i=1}^{n}\lambda = \lambda^n$

Interversion de somme: Soit $(x_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ des éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ (np termes)

Soit $(x_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ des éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{1\le i\le j\le n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} x_{ij}$ ($\frac{n(n+1)}{2}$ termes)

Carré d'une somme de termes: Soit $(x_i)_{1\le i\le n}$ n éléments de $\mathbb{K}$: $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$

Quelques sommes:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) = \mathrm{Re}((1+e^{ix})^n) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx) = \mathrm{Im}((1+e^{ix})^n)$$

IV-Trigonométrie:

Tableau de valeurs:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	✕	0	✕

Formules usuelles:

x est un réel.

Dans les formules suivantes s'assurer que les nombres sont bien définis (faire attention en particulier à **tan** et **cot**)

* Parité: $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$; $\tan(-x) = -\tan x$
* Périodicité: $\cos(x+2\pi) = \cos x$; $\sin(x+2\pi) = \sin x$; $\tan(x+\pi) = \tan x$
* $\cos(x+\pi) = -\cos x$; $\sin(x+p) = -\sin x$
* $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\tan(\pi - x) = -\tan x$
* $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$; $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$; $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$
* $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$; $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$; $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$
* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi)$; $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \ne k\pi)$

*$\cos 2x = 2\cos^2 - 1$; $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$; $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

* On pose $t = \tan\frac{x}{2}$: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

Formules d'addition:

* $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$; $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$; $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$
* $\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$; $\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
* $\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$; $\sin p - \sin q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
* $\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$; $\sin a\sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$
* $\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$