# Polynômes

—

C. Susset

—

## 1 Polynômes à une indéterminée

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### 1.1 Fonctions polynômes

**Définition 1** *On appelle fonction polynôme à cœfficients dans $\mathbb{K}$, toute application $P$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ de la forme :* $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ *avec* $d \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, d]\!],\ a_k \in \mathbb{K}$.

**Notation :**

- Soit $P$ une fonction polynôme, avec $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$, on pose $\forall k \geq d+1,\ a_k = 0$.
  $P$ se note alors : $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k x^k$ ou $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.
- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$, la notation $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ désigne une fonction polynôme si et seulement si $\exists d \in \mathbb{N},$ tel que $\forall n \geq d+1 \quad a_n = 0$

**Proposition 1** *Soit $P$ et $Q$ deux fonctions polynômes à cœfficients dans $\mathbb{K}$,*
$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *et* $Q(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
*On a : $P = Q$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.*

On notera $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble des fonctions polynômes et $\mathcal{A}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.
On définit alors dans $\mathcal{A}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ les opérations suivantes :
Pour $(f, g) \in \mathcal{A}(\mathbb{K},\mathbb{K})^2$ :
**Somme :** $f + g$ avec $\forall x \in \mathbb{K},\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
**Produit :** $f \times g$ avec $\forall x \in \mathbb{K},\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$. $f \times g$ se notera aussi : $f.g$

On notera $O$ l'application nulle, $\forall x \in \mathbb{K},\ O(x) = 0$ et $\mathbf{1}$ l'application constante égale à 1, $\forall x \in \mathbb{K},\ \mathbf{1}(x) = 1$.

**Proposition 2**

- $(\mathcal{A}(\mathbb{K},\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau commutatif et non-intègre,*
  *$O$ est l'élément neutre de l'addition et $\mathbf{1}$ est l'élément neutre de la multiplication.*
- $\mathbb{K}[x]$ *est un sous-anneau intègre de* $(\mathcal{A}(\mathbb{K},\mathbb{K}), +, \times)$

On notera aussi $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ on note $f_{|\mathbb{R}}$ la restriction de $f$ à $\mathbb{R}$, soit $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{|\mathbb{R}}(x) = f(x)$, on a alors $f_{|\mathbb{R}} \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, pour deux fonctions polynômes $P$ et $Q$ on a $P_{|\mathbb{R}} = Q_{|\mathbb{R}}$ si et seulement si $P = Q$, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté on identifiera $P$ et $P_{|\mathbb{R}}$
$(\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{K}), +, \times)$ est aussi un anneau commutatif non-intègre, et $\mathbb{K}[x]$ peut alors être identifié à un sous-anneau intègre de $(\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{K}), +, \times)$.

### 1.2 Polynômes

On notera $X$ la fonction polynôme $X$ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x \end{array}$

Une fonction polynôme $P$ définie par $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ se notera alors

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$$

. On dira aussi : $P(X)$ est un polynôme à une indéterminée à cœfficients dans $\mathbb{K}$.
$K[X]$ désignera l'ensemble des polynômes à une indéterminée à cœfficients dans $\mathbb{K}$.

**Proposition 3** *on a :*

- $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *est un anneau commutatif intègre. le polynôme nul $O$ est l'élément neutre de l'addition et le polynôme constant égal à $\mathbf{1}$ est l'élément neutre de la multiplication.*

Il existe d'autres présentations des polynômes, mais pour toutes ces présentations on a le résultat :

**Proposition 4**

*L'application :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[x] \\ P & \mapsto & x \mapsto P(x) \end{array}$ *est un isomorphisme d'anneaux.*

**Vocabulaire**

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = a_p X^p + a_{p+1} X^{p+1} + \cdots + a_d X^d$ avec $p \leq n$, $a_p \neq 0$ et $a_d \neq 0$ :

- $d$ est le degré de $P$ on note $\mathrm{d}^\circ P = d$, par convention le polynôme nul a pour degré $-\infty$, $\mathrm{d}^\circ O = -\infty$
- $p$ est la valuation de $P$
- $a_d X^d$ est le terme dominant de $P$
- $a_d$ est le cœfficient du terme dominant
- Le polynôme $P$ est dit unitaire (on dit aussi normalisé) si $a_d = 1$

# 2 Propriétés

## 2.1 Propriétés du degré

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

- $\mathrm{d}^\circ(P + Q) \leq \max(\mathrm{d}^\circ P, \mathrm{d}^\circ Q)$ et si $\mathrm{d}^\circ P \neq \mathrm{d}^\circ Q$ alors $\mathrm{d}^\circ(P + Q) = \max(\mathrm{d}^\circ P, \mathrm{d}^\circ Q)$
- $\mathrm{d}^\circ(P \times Q) = \mathrm{d}^\circ P + \mathrm{d}^\circ Q$

Conséquence :

**Proposition 5** *Les polynômes inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0, $(\mathbb{K}[X])^* = \mathbb{K}$.*

## 2.2 Substitution

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ :

- Soit $\alpha$ un élément de $\mathbb{C}$, à $X$ on peut substituer $\alpha$, $P(\alpha)$ est alors un élément de $\mathbb{C}$.
  Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ alors $(P + Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$ et $(P \times Q)(\alpha) = P(\alpha) \times Q(\alpha)$.

- Composée de polynômes :
  Soit $A(X)$ un élément de $\mathbb{K}[X]$, à $X$ on peut substituer $A(X)$, $P(A(X))$ est alors un élément de $\mathbb{K}[X]$. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ alors $P(A(X)) = \sum_{k=0}^{d} a_k A(X)^k$. On a aussi $P(A) = P \circ A$.
  Si $P$ et $A$ sont non-nuls alors $\mathrm{d}^\circ(P \circ A) = \mathrm{d}^\circ P \times \mathrm{d}^\circ A$.
  Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ alors $(P+Q)(A(X)) = P(A(X)) + Q(A(X))$ et $(P \times Q)(A(X)) = P(A(X)) \times Q(A(X))$.

# 3 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

## 3.1 Diviseurs et multiples

**Définition 2** *Soit $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que $A$ divise $B$ ou que $B$ est un multiple de $A$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$.*
*On note $A \mid B$*

**Remarque 1**

- *Si $B \neq O$ et $A \mid B$ alors $\mathrm{d}^\circ A \leq \mathrm{d}^\circ B$.*
- *Tout polynôme $A$ divise le polynôme nul $O$*

**Définition 3** *Deux polynômes $A$ et $B$ sont associés si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ A = \lambda B$*

**Proposition 6** *Deux polynômes $A$ et $B$ sont associés si et seulement si $A \mid B$ et $B \mid A$*

## 3.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

**Théorème 1** *Soit $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B$ non-nul.*
*Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $A = BQ + R$ avec $\mathrm{d}^\circ R < \mathrm{d}^\circ B$.*
*$Q$ est appelé le quotient et $R$ le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$.*

**Proposition 7** *Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$ et $A = BQ + R$, $\mathrm{d}^\circ R < \mathrm{d}^\circ B$, on a : $B \mid A \Leftrightarrow R = 0$.*

## 3.3 Racines d'un polynôme

**Définition 4** *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha$ est racine de $P$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$.*
*On dit aussi que $\alpha$ est un zéro de $P$.*

**Proposition 8**
*Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ unique tel que $P(X) = (X - \alpha)Q(X) + P(a)$.*

**Corollaire 1** *$\alpha$ est une racine du polynôme $P$ si et seulement si $(X - \alpha)$ divise $P$.*

**Théorème 2**
*Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont $n$ racines distinctes de $P$.*
*Alors $\prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ divise $P$.*

Conséquences :

**Proposition 9** *Un polynôme non-nul de degré $d$ admet au plus $d$ racines distinctes.*

**Proposition 10**
*Si $P$ est de degré $d \in \mathbb{N}$ et admet $d$ racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ Alors $\exists \lambda \in K,\ A = \lambda \prod\limits_{k=1}^{d} (X - \alpha_k)$*

**Proposition 11** *Si $P$ est de degré $d \in \mathbb{N}$ et admet $d + 1$ racines distinctes Alors $P = 0$.*

**Proposition 12** *Si $P \in \mathbb{K}[X]$ admet une infinité de racines Alors $P = 0$.*

## 3.4 Racines multiples

**Définition 5** *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq O$ et $a \in \mathbb{K}$.*
- *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a$ est racine d'ordre $p$ de $P$ si et seulement si $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X - a)^p Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.*
- *$a$ est racine multiple de $P$ si et seulement si $a$ est racine d'ordre $p$ de $P$ avec $p \geq 2$.*
- *$a$ est racine simple de $P$ si et seulement si $a$ est racine d'ordre $1$ de $P$.*

**Proposition 13** *Soit $a \in K$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. $a$ est racine d'ordre $p$ si et seulement si $(X - a)^p$ divise $P(X)$ mais $(X - a)^{p+1}$ ne divise pas $P(X)$*

**Proposition 14**
*Si $P$ est un polynôme non-nul de $\mathbb{K}[X]$ et $a_1, \ldots, a_p$ sont $p$ racines distinctes de $P$ avec $\forall k \in [\![1, p]\!]$ $a_k$ d'ordre de multiplicité au moins égal à $r_k$.*
*Alors $\prod\limits_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k}$ divise $P$ et $\sum\limits_{k=1}^{p} r_k \leq \mathrm{d}^\circ P$.*

**Proposition 15**
*Si $P$ est un polynôme non-nul de $\mathbb{K}[X]$ et $a_1, \ldots, a_p$ sont $p$ racines distinctes de $P$ avec $\forall k \in [\![1, p]\!]$ $a_k$ d'ordre de multiplicité égal à $r_k$ avec $\sum\limits_{k=1}^{p} r_k = \mathrm{d}^\circ P$.*
*Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ P(X) = \lambda \prod\limits_{k=1}^{p} (X - a_k)^{r_k}$.*

**Définition 6** *Soit $P$ un polynôme non-nul de $\mathbb{K}[X]$, $P$ est un polynôme scindé si et seulement si $P$ peut s'écrire sous la forme : $P(X) = \lambda \prod\limits_{k=1}^{p} (X - a_k)^{r_k}$ avec $(\lambda, a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ et $(r_1, \cdots, r_p) \in \mathbb{N}^p$.*

# 4 Dérivation des polynômes

**Définition 7** *Soit* $P(X) \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = \sum\limits_{n=0}^{d} a_n X^n$.
*On appelle polynôme dérivé de* $P$ *le polynôme noté* $P'$ *défini par :*

$$P'(X) = \sum_{n=1}^{d} n a_n X^{n-1}$$

**Notation :** Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $P^{(k)}$ la dérivée $k$-ième de $P$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$ avec $P^0 = P$.

**Propriétés :** Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

**$P_1$ :** $(a.P + b.Q)' = a.P' + b.Q'$

**$P_2$ :** $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$.

**$P_3$ (Formule de Leibniz) :** $(P \times Q)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} \times Q^{(n-k)}$.

**$P_4$ :** $d^\circ P = d\ , d \geq 1 \Rightarrow d^\circ P' = d - 1$, pour $0 \leq k \leq d\,,\ d^\circ P^{(k)} = d - k$ et pour $k > d,\ P^{(k)} = 0$

**Proposition 16 (Formule de Taylor)**
**Si** $P$ *est un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *de degré* $d \in \mathbb{N}$ *et* $a \in \mathbb{K}$
**Alors** $P(X) = \sum\limits_{n=0}^{d} \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$

En particulier : $P(X) = \sum\limits_{n=0}^{d} \dfrac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$.

**Théorème 3** *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$.
*$a$ est racine d'ordre $n$ de $P$ si et seulement si* $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ P^{(k)}(a) = 0$ *et* $P^{(n)}(a) \neq 0$.

# 5 Factorisation des polynômes

## 5.1 Polynômes irréductibles

**Définition 8** *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$, *$P$ est irréductible si et seulement si* $d^\circ P \geq 1$ *et les seuls diviseurs de $P$ sont les éléments de* $\mathbb{K}^*$ *et les associés de $P$.*

**Théorème 4 (Théorème de d'Alembert)**
*Tout polynôme non constant de* $\mathbb{C}[X]$ *possède au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

**Conséquence :**

**Théorème 5**
- *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{C}[X]$ *sont les polynômes de degré 1.*
- *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$ *sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré* 2 *de discriminant strictement négatif.*

- Dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes irréductibles sont les polynômes $P(X) = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$
- Dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes irréductibles sont les polynômes $P(X) = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et les polynômes $P(x) = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $b^2 - 4ac < 0$.

## 5.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

**Théorème 6**
- *Tout polynôme non nul de* $\mathbb{C}[X]$ *est scindé sur* $\mathbb{C}$.
- *Si* $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, *$P$ non constant a pour racines distinctes dans* $\mathbb{C}$, $a_1, \cdots, a_p$ *d'ordre de multiplicité respectif* $r_1, \cdots, r_p$ *Alors* $P(X) = \lambda \prod\limits_{k=1}^{p} (X - a_k)^{r_k}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *est le cœfficient du terme dominant.*

*Une telle factorisation est unique à l'ordre près des facteurs.*

**Exemple 1** *Pour $n \geq 1$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ soit $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, ce sont les racines $n$-ième de l'unité. On a :*

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - w_k)$$

.

### 5.3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

**Théorème 7**

- *Soit $P$ un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. $P$ se décompose de manière unique à l'ordre des facteurs près sous la forme : $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{r_k} \prod_{k=1}^{q} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{s_k}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $a_1, \cdots, a_p$ sont les racines réelles de $P$ (éventuellemnt p=0), $\forall k \in [\![1, q]\!]$, $(\beta_k, \gamma_k) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$, $(r_k, s_k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est le cœfficient du terme dominant.*

### 5.4 Fonctions symétriques élémentaires

**Proposition 17** *Soit $P$ un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$ de degré $d \geq 1$, avec $x_1, \cdots, x_d$ les racines de $P$, chaque racine répétée avec son ordre de multiplicité et $a_d$ le cœfficient du terme dominant de $P$.*
$P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_0$ *et* $P(X) = a_d \prod_{k=1}^{d} (X - x_k)$ *On a :*

$$\forall k \in [\![0, d-1]\!],\ a_k = (-1)^{d-k} \sigma_{d-k} a_d \text{ où } \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

Les expressions $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ sont appelées fonctions symétriques élémentaires des racines du polynôme scindé $P$.

**Deux cas à retenir :** Pour $P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_0$
Somme des racines : $x_1 + \cdots + x_d = -\dfrac{a_{d-1}}{a_d}$
Produit des racines : $x_1 \times \cdots \times x_d = (-1)^d \dfrac{a_0}{a_d}$