Entiers
Dénombrement

—

C. Susset

—

1 Entiers naturels

1.1 Relation d'ordre

Définition 1 *Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, R est une relation d'ordre si et seulement si*

1. *Pour tout élément x de E, x est en relation avec x, on note : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$ (on dit que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive).*
2. *$\forall (x,y) \in E^2$; $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \ \Rightarrow\ x = y$ (on dit que la relation est antisymétrique).*
3. *$\forall (x,y,z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \ \Rightarrow\ x\mathcal{R}z$ (on dit que la relation est transitive).*

Si de plus :

- *$\forall (x,y) \in E^2$ $x\mathcal{R}y$ ou $x\mathcal{R}y$ (deux éléments quelconques sont comparables)*
  On dit que l'ordre est total, si l'ordre n'est pas total on dit que c'est un ordre partiel

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ se note souvent $\leq$ ou $\geq$, si E est un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$ on dit que $(E,\leq)$ est un ensemble ordonné, si l'ordre est total on dit que c'est un ensemble totalement ordonné sinon on dit que c'est un ensemble partiellement ordonné.
Si $x \leq y$ avec $x \neq y$ on note aussi $x < y$, mais la relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur E car elle n'est pas réflexive.

Exemple 1

1. *$(\mathbb{R},\leq)$ avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$, $(\mathbb{R},\leq)$ est un ensemble totalement ordonné.*
2. *Soit E un ensemble non-vide contenant au moins deux éléments, on considère l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ constitué des parties de E muni de l'inclusion, $(\mathcal{P}(E),\subset)$ est un ensemble partiellement ordonné.*
3. *Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On muni E de la relation binaire $\leq$ définie par $\forall (f,g) \in E^2,\ f \leq g \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$. $(E,\leq)$ est un ensemble partiellement ordonné.*

Définition 2 *Soit $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$, $a \in E$.*

- *a est un majorant de A si et seulement si $\forall x \in A,\ x \leq a$*
- *a est un minorant de A si et seulement si $\forall x \in A,\ a \leq x$*
- *a est le plus grand élément de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leq a$, on note alors $a = \max(A)$*
- *a est le plus petit élément de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A,\ a \leq x$, on note alors $a = \min(A)$*
- *a est la borne supérieure de A si et seulement si a est le plus petit des majorants de A, on note alors $a = \sup(A)$*
- *a est la borne inférieure de A si et seulement si a est le plus grand des minorants de A, on note alors $a = \inf(A)$*

Remarque 1

- *Les majorants, minorants, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure n'existent pas toujours.*
- *Il peut y avoir une infinité de majorants, de minorants, par contre si le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure d'une partie A de E existe alors celui-ci ou celle-ci est unique.*
- *Si A possède un plus grand (respectivement plus petit) élément celui-ci est aussi la borne supérieure (respectivement inférieure) de A.*
- *Un plus grand élément ou une borne supérieure (respectivement plus petit élément ou borne inférieure) est un majorant (respectivement minorant).*
- *Si A n'a pas de majorant (respectivement de minorant) alors A n'admet pas de plus grand élément ni de borne supérieure (respectivement de plus petit élément ni de borne inférieure).*

Exemple 2

- *$E = \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre usuelle. A est le sous-ensemble des entiers impairs, $A = \{n \in \mathbb{N} \,|, \exists p \in \mathbb{N},\, n = 2p+1\}$. A n'a pas de majorant, donc A n'a pas de borne supérieure$A$ possède deux minorants 0 et 1, 1 est le plus petit élément de A et donc 1 est aussi la borne inférieure de A.*
- *$E = \mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle. On considère l'intervalle de $\mathbb{R}$, $A_1 =]-\pi, 3]$ et la partie de $\mathbb{R}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{Q},\, x^2 \leq 2\}$.*
  1. *A_1 possède une infinité de minorants et de majorants, les minorants sont les éléments de l'intervalle de $\mathbb{R}$, $]-\infty, -\pi]$, les majorants sont les éléments de l'intervalle $[3, +\infty[$, le plus grand élément de A_1 est 3, c'est donc aussi la borne supérieure de A_1, A_1 n'a pas de plus petit élément, par contre il admet $-\pi$ pour borne inférieure.*
  2. *A_2 possède une infinité de minorants et de majorants, les minorants sont les éléments de l'intervalle de $\mathbb{R}$, $]-\infty, -\sqrt{2}]$, les majorants sont les éléments de l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$, A_2 n'a pas de plus grand élément par contre il admet $\sqrt{2}$ pour borne supérieure, A_2 n'a pas de plus petit élément, il admet $-\sqrt{2}$ pour borne inférieure. On peut remarquer que $A_2 \subset \mathbb{Q}$ et que dans $\mathbb{Q}$ muni de sa relation d'ordre usuelle A_2 est majoré mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ de même il est minoré mais n'a pas de borne inférieure.*
- *Soit E un ensemble non-vide, on considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$, $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ et la partie de $\mathcal{P}(E)$, $\Omega = \{A, B\}$.*
  - *Soit $F \in \mathcal{P}(E)$, F est un majorant de Ω si et seulement si $A \cup B \subset F$*
  - *Soit $F \in \mathcal{P}(E)$, F est un minorant de Ω si et seulement si $F \subset A \cap B$*
  - *$A \cup B$ est la borne supérieure de Ω et $A \cap B$ est la borne inférieure de Ω.*
  - *Ω admet un plus grand, (plus petit) élément si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$*

1.2 Nombres entiers naturels

1.2.1 Propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un ensemble ordonné qui vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

A_1 : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
A_2 : $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.
A_3 : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Une des premières conséquences de ces propriétés est que la relation d'ordre de $\mathbb{N}$ est un ordre total. Elles permettent aussi de démontrer le principe de récurrence énoncé dans le paragraphe suivant et de construire l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et de retrouver les propriétés classiques de ces opérations que nous supposerons acquises dans la suite.

1.2.2 Récurrence

Théorème 1 *soit A une partie de non vide de $\mathbb{N}$*
Si $0 \in A$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$ l'implication $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ est vraie
Alors $A = \mathbb{N}$

Ce théorème est souvent utilisé sous l'une des des deux formes suivantes :

Principe de récurrence simple Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un entier n
Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie (**initialisation**) et
$\forall n \in \mathbb{N}$, on a l'implication $\mathcal{P}(n)$ Vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ Vraie (**hérédité**).
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Principe de récurrence avec prédécesseurs Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un entier n
Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a l'implication $(\forall k \leq n,\ \mathcal{P}(k)$ Vraie $) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ Vraie .
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.*

On énonce d'abord la propriété à démontrer par récurrence : $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

initialisation : *pour $n = 0$ on a $\sum\limits_{k=0}^{0} k^3 = 0 = \left(\dfrac{0(0+1)}{2}\right)^2$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie*

hérédité : *Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, au rang $n+1$ on a :*
$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^2 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right) = (n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ *de sorte que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$*

Conclusion : *On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$*

Exemple 4 *On considère la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$
montrer que la suite est définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n$.

Montrons par récurrence la propriété : $n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: u_n est défini et $u_n = 3^n$.
Utilisons une récurrence avec prédécesseurs, en fait la récurrence porte sur deux termes consécutifs de sorte que l'initialisation doit porter sur les deux premiers termes.
initialisation : *D'après la définition de la suite, u_0 et u_1, existent, sont uniques et $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.*
hérédité : *Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $0 \leq k \leq n$, au rang $n+1$ on a :*
$n \geq 1$ et $n-1 \geq 0$, d'après l'hypothèse de récurrence u_n et u_{n-1} sont déterminés de manière unique de plus $u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}$ de sorte que u_{n+1} existe et est déterminé de manière unique, en outre : $u_{n+1} = 4.3^n - 3.3^{n-1} = (4-1).3^n = 3^{n+1}$ par suite $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
conclusion : *On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.*

1.2.3 Suites

Soit E un ensemble non-vide

Définition 3 *On appelle suite d'éléments de E, une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$, c'est à dire qu'une suite est une application de de $\mathbb{N}$ dans E ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans E, on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n_i n I}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ l'application :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & E \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$ *ou* $\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & E \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$

- **Suites définies par récurrence :**

Si f est une application de E dans E et $a \in E$, le principe de récurrence permet de montrer que les relations : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ définissent une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
De même si $(a,b) \in \mathbb{K}^2,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ les relations : $\begin{cases} u_0 = \alpha\,,\ u_1 = \beta \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$ définissent une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.3 Ensembles finis

1.3.1 Définition

On notera dans la suite $[\![1,n]\!] = \{k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n\}$

Définition 4
Un ensemble E est fini
si et seulement si E est vide ou il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E.

Un ensemble qui n'est pas fini est appelé un ensemble infini.

Proposition 1 $(p,n) \in \mathbb{N}^{*2}$*, s'il existe une bijection de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ alors $p = n$*

Conséquence :

Proposition 2
Si E est un ensemble fini non-vide et $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E,
alors n est unique.
n est appelé le cardinal de E, on note $n = \mathrm{card}(E)$

On convient que l'ensemble vide a pour cardinal 0, $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$.

1.3.2 Propriétés

P_1 Si E un ensemble fini et E' une partie de E, $E' \subset E$ Alors E' est un ensemble fini et $\mathrm{card}(E') \leq \mathrm{card}(E)$ de plus $\mathrm{card}(E') = \mathrm{card}(E)$ si et seulement si $E = E'$.

P_2 Si E et F sont deux ensembles avec E fini et il existe une bijection de E sur F
Alors F est un ensemble fini et $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$.
Ceci montre qu'un ensemble fini ne peut pas être en bijection avec une de ces parties strictes.

P_3 Si A et B sont deux ensembles disjoints Alors $A \cup B$ est fini et : $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$

P_4 Si A est une partie d'une ensemble fini E Alors $\mathrm{card}\,(\complement_E A) = \mathrm{card}E - \mathrm{card}A$.

P_5 Si $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille de p ensembles finis deux à deux disjoints Alors $\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{card}A_k$.

P_6 Si A et B sont deux ensembles finis alors $A \cup B$ est un ensemble fini et
$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}(A \cap B)$

P_7 Si E et F sont deux ensembles finis alors $E \times F$ est fini et $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}E.\mathrm{card}F$.

P_8 Si E est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$ alors E^p est une ensemble fini et $\mathrm{card}(E^p) = (\mathrm{card}E)^p$.

Proposition 3 *Si E et F sont deux ensembles finis et f une application de E dans F Alors*

1. $\mathrm{card}f(E) \leq \mathrm{card}E$
2. *f est injective si et seulement si* $\mathrm{card}f(E) = \mathrm{card}E$
3. *f est surjective si et seulement si* $\mathrm{card}f(E) = \mathrm{card}F$
4. *Si* $\mathrm{card}E = \mathrm{card}F$ *Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *f est bijective*
   (b) *f est injective*
   (c) *f est surjective*

Proposition 4 *Une partie non vide P de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.*

Proposition 5 *Si P est finie et non vide Alors il existe une bijection strictement croissante et une seule de $[\![1, n]\!]$ sur P où* $n = \mathrm{card}(P)$.

2 Dénombrement

2.1 Applications

2.1.1 Nombre de p-listes d'un ensemble fini

Soit F un ensemble fini à n éléments et $p \in \mathbb{N}$

Définition 5
On appelle p-liste d'éléments de F un élément de F^p, ce qui correspond aussi à une suite à p éléments de F.

Proposition 6 *Le nombre de p-listes d'éléments de F est* $n^p = (\mathrm{card}F)^p$

2.1.2 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Soit E et F deux ensembles finis non-vides de cardinaux respectifs p et n.
L'ensembles des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.
Une application f de E dans F peut-être identifié à la famille $(x_i)_{i \in E} \in F^E$ d'éléments de F indexée par l'ensemble E, avec $\forall i \in E,\ x_i = f(i)$, de sorte que l'ensemble des applications de E dans F se note aussi F^E.

Proposition 7
Si $E = \{a_1, \dots, a_p\}$, l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} F^E & \to & F^p \\ f & \mapsto & (f(a_1), \dots, f(a_p)) \end{array} \right.$ *est une bijection.*

Proposition 8
Si $\mathrm{card}E = p$ *et* $\mathrm{card}F = n$ *Alors* $\mathrm{card}\mathcal{F}(E, F) = (\mathrm{card}F)^{\mathrm{card}E}$ *soit* $\mathrm{card}\mathcal{F}(E, F) = n^p$.

Conséquence :

Proposition 9 *Si* $\mathrm{card}E = p$ *Alors* $\mathrm{card}\mathcal{P}(E) = 2^p$

2.1.3 Nombre d'injections

Soit E et F deux ensembles finis non-vides de cardinaux respectifs p et n.
Une injection de E dans F correspond à la donnée d'une $p-liste$ de F d'éléments distincts deux à deux, c'est à dire que l'application φ de 7 induit une bijection de l'ensemble des injections de E dans F sur l'ensemble des p-listes d'éléments de F distincts deux à deux.

Proposition 10
Si $\text{card}E = p$ *et* $\text{card}F = n$ *Alors le nombre d'injections de* E *dans* F *est* $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$
En particulier ce nombre est nul si $p > n$

2.1.4 Nombre de bijections

Définition 6 *On appelle permutation d'un ensemble* E *non vide une bijection de* E *sur* E*, on notera* $\mathcal{S}(E)$ *l'ensemble des permutations de* E*.*

Proposition 11 *Si* E *est un ensemble non vide de cardinal* n *Alors le nombre de permutation de* E *est :* $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$.

n ! : se lit «factorielle n»
On convient que $0! = 1$

2.2 Combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier, on appelle combinaison de E de p éléments choisis parmi n une partie de E à p éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E ne dépend que de n et p, il ne dépend pas de E on le note $\binom{n}{p}$,
on trouve aussi la notation C_n^p à la place de $\binom{n}{p}$.

Proposition 12 *Soit* E *un ensemble fini de cardinal* n *et* $p \in \mathbb{N}$*, le nombre de parties de* E *à* p *éléments est :*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \textit{si } 0 \leq p \leq n, \qquad \binom{n}{p} = 0 \quad \textit{si } p > n$$

$$\textit{soit} \qquad \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \quad \textit{si } p \geq 1$$

2.2.1 Propriétés

$\mathbf{P_1}$ $\forall 0 \leq p \leq n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

$\mathbf{P_2}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

$\mathbf{P_3}$ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ (formule du triangle de Pascal).

2.2.2 Formule du binôme de Newton

Proposition 13
Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ *avec* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Plus généralement : si $(A,+,.)$ *est un anneau,* $(a,b) \in A^2$ *avec* $\boxed{a.b=b.a}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$