APPLICATIONS

I-RELATIONS:

Soit **E** et **F** deux ensembles.

Définition: La donnée d'une partie **G** de **ExF** définit une relation $\boldsymbol{R}$ de **E** dans **F**.
Pour **(x,y)∈G** on dit que **x** est en relation avec **y**, on note **x*R*y.**
G est le graphe de la relation.

Vocabulaire:
E est l'ensemble de départ.
F est l'ensemble d'arrivée.
Si **x*R*y** alors **y** est une image de **x**
x est un antécédent de **y**;

II-APPLICATIONS:

1)Fonction:

Soit **E** et **F** deux ensembles et f une relation de **E** dans **F**.
f est une **fonction** si tout élément de l'ensemble de départ possède au plus une image.

on note: $\begin{array}{l} \quad E \to F \\ f: x \to y = f(x) \end{array}$

Ensemble de définition:
Si f est une fonction de **E** dans **F**, on appelle ensemble de définition de f la partie de **E** constituée des éléments qui possèdent une image.

Restriction:
Si f est une fonction de **E** dans **F** et **A** est une partie de **E** on appelle restriction de f à **A** la fonction définie par: $\begin{array}{l} \quad A \to F \\ f_{/A}: x \to f_{/A}(x) = f(x) \end{array}$

On notera $\mathcal{F}$**(E,F)** l'ensemble des fonctions de **E** dans **F**

Prolongement:
Si f est une fonction de **E** dans **F** , **E⊂E'** et $g \in \mathcal{F}$**(E',F)** avec $g_{/E}=f$ on dit que g est un prolongement de f.

2)Equation à une inconnue:

Soit f une fonction de **E** dans **F** et **A⊂E**.
Soit **y∈F**, chercher les antécédents de **y** qui appartiennent à **A** revient à résoudre l'équation:

$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in A \end{cases}$ où **x** est l'inconnue et **A** est l'ensemble de résolution.

3)Applications:

Définition: Soit f une relation de **E** dans **F.** f est une application si tout élément de l'ensemble de départ possède exactement une image.
Une application de **E** dans **F** est donc un élément de $\mathcal{F}$**(E,F)**
On note $\mathcal{A}$**(E,F)** l'ensemble des applications de **E** dans **F.** On a $\mathcal{A}$**(E,F)**⊂ $\mathcal{F}$**(E,F)**
Pour **E=F** on appelle **identité de E** ou **application identique de E:** $\begin{array}{l} Id_E: E \to E \\ \qquad\ x \to x \end{array}$

4)Opérations:

Soit f et g deux applications de **E** dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ (λ est un scalaire)

somme: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

produit par un scalaire: $(\lambda.f)(x)=\lambda.f(x)$

produit: $(f.g)(x)=f(x).g(x)$

Soit $f\in\mathcal{A}(E,F)$ et $g\in\mathcal{A}(F,H)$ où **E**, **F** et **H** sont trois ensembles.

composition: $g\circ f\in\mathcal{A}(E,H)$ $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

propriété: Si $f\in\mathcal{A}(E,F)$, $g\in\mathcal{A}(F,H)$ et $h\in\mathcal{A}(H,L)$ Alors $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ on dit que la loi de composition des applications est associative.

5)Application caractéristique:

Définition: On appelle application caractéristique d'une partie A d'un ensemble E l'application notée $\mathbb{1}_A$ définie par : $\forall x\in A$, $\mathbb{1}_A(x)=1$ et $\forall x\in C_E A$, $\mathbb{1}_A(x)=0$

On a $(\mathbb{1}_A(x)=1)\Leftrightarrow(x\in A)$ et $(\mathbb{1}_A(x)=0)\Leftrightarrow(x\notin A)$

propriété: $\mathbb{1}_{\bar{A}}=1-\mathbb{1}_A$ $\quad\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$ $\quad\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$

6)Image directe et réciproque d'un ensemble:

Soit $f\in\mathcal{A}(E,F)$ et $A\subset E$, $B\subset F$

Image (directe): $f(A)=\{y\in F,\exists x\in A\ y=f(x)\}$ on a $f(A)\subset F$

Image réciproque: $^{-1}f(B)=\{x\in E\,/\,f(x)\in B\}$ on a $^{-1}f(B)\subset E$

7)Applications particulières:

Soit $f\in\mathcal{A}(E,F)$

Injection: f est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au plus** un antécédent

f est injective $\Leftrightarrow\forall y\in F$ l'équation $\begin{cases}f(x)=y\\x\in E\end{cases}$ a **au plus** une solution

f est injective $\Leftrightarrow[\forall(x_1,x_2)\in E^2\quad f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2]$

f est injective $\Leftrightarrow[\forall(x_1,x_2)\in E^2\quad x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)]$

Surjection: f est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au moins** un antécédent.

f est surjective $\Leftrightarrow\forall y\in F$ l'équation $\begin{cases}f(x)=y\\x\in E\end{cases}$ a **au moins** une solution

f est surjective $\Leftrightarrow[\forall y\in F\quad\exists x\in E\,/\,f(x)=y]$

f est surjective $\Leftrightarrow f(E)=F$

Bijection: f est bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **exactement** un antécédent.

f est bijective $\Leftrightarrow\forall y\in F$ l'équation $\begin{cases}f(x)=y\\x\in E\end{cases}$ a exactement une solution

f est bijective $\Leftrightarrow[\forall y\in F\quad\exists!x\in E\,/\,f(x)=y]$

f est bijective $\Leftrightarrow[\exists g\in\mathcal{A}(F,E)\,/\,f\circ g=Id_F$ et $g\circ f=Id_E]$

g est alors unique, bijective de F sur E et s'appelle la bijection réciproque de f, on note $g=f^{-1}$

pour $(x,y)\in E\times F$ $\quad y=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

proposition:

Soit $f\in\mathcal{A}(E,F)$ et $g\in\mathcal{A}(F,G)$. Si f et g sont injectives (resp. surjectives, bijectives), alors $g\circ f$ est injective (resp. surjective, bijective)