TD Seconde période
Algèbre 2

Groupes

Exercice 1 *On considère le produit vectoriel $\wedge$ dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.*

1. *$\wedge$ est-il une loi de composition interne dans $\mathbb{R}^3$?*
2. *$\wedge$ est-il associatif ?*
3. *$\wedge$ possède-t-il un élément neutre ?*
4. *Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, l'équation $\begin{cases} \vec{u} \wedge x = \vec{u} \\ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$ possède-t-elle des solutions ?*
5. *Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u}$ possède-t-il un symétrique ?*
6. *$\left(\mathbb{R}^3, \wedge\right)$ est-il un groupe ?*

Exercice 2 *Dans l'ensemble des nombres réels, on définit la loi $\star$:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \star y = -2xy + 2(x+y) - 1$$

. Démontrer que $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \star)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 *Dans $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on définit la loi $\top$ par :*

$$\forall (a,b) \in G,\ \forall (c,d) \in G, \quad (a,b) \top (c,d) = (ac, b + ad)$$

Montrer que $(G, \top)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Anneaux

Exercice 4 *On considère la partie A de $\mathbb{C}$ définie par $A = \{a + ib\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$*
Montrer que $(A, +, .)$ est un anneau, est-il intègre ? Déterminer les éléments inversibles de A.

Exercice 5 *Soit E un ensemble non-vide et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, on définit sur $\mathcal{A}$ l'opération Δ (différence symétrique) par $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ A \Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$.*

1. *Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, écrire à l'aide des fonctions caractéristiques de A et B celles de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \Delta B$*
2. *$(\mathcal{A}, \cup, \cap)$ est-il un anneau ?*
3. *$(\mathcal{A}, \Delta, \cap)$ est-il un anneau ?*

Corps

Exercice 6 *Soit $\mathbf{K} = \{a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$, montrer que $(K, +, .)$ est un corps commutatif.*

Arithmétique

Exercice 7 *Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 2004 et 835*

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Montrer que :
Si $2^n - 1$ est premier Alors n est premier,
La proposition réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9 *On considère la suite de Fibonacci $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definie par $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.*
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$. En déduire que f_n et f_{n+1} sont premiers entre eux.