TD Seconde période

Algèbre 1

Inégalités

Exercice 1 *Montrer que dans* $\mathbb{R}$ *:* $(x^2+y^2)^3 \geq (x^3+y^3)^2$

Exercice 2 *On considère la partie de* $\mathbb{R}$ *:* $A = \{t = xy + yz + zx \in \mathbb{R}, \text{ tel que } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$.
Montrer que : $\max(A) = 1$ *et* $\min(A) = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 *Pour quelles valeurs de* $n \in \mathbb{N}$ *peut-on écrire l'inégalité :* $\dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ *?*
En déduire l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{5}{4}$$

Récurrence

Exercice 4 *Montrer par récurrence sur l'entier* n *que :*

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k(2k-1) = (-1)^n n$

Exercice 5 *Etudier le raisonnement suivant dû au logicien et mathématicien Alfred Tarski :*
" Considérons la proposition suivante :
$(\mathbf{P_n})$ *: Pour tout ensemble* $\mathbf{E_n}$ *de cardinal* n *l'implication suivante est vraie :* $(p \in \mathbf{E_n} \text{ et } q \in \mathbf{E_n}) \Rightarrow (p = q)$
$(\mathbf{P_n})$ *: est vraie pour* $n = 1$.
Supposons qu'elle soit vraie au rang n*, au rang* $n+1$ *numérotons les éléments d'un ensemble :*
$\mathbf{E_{n+1}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. *Les ensembles* $\mathbf{E_n} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *et* $\mathbf{E'_n} = \{x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ *ont chacun un cardinal égal à* n*. Par conséquent en appliquant l'hypothèse de récurrence on a :* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ *et* $x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$ *de sorte que* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$ *ce qui montre que la propriété au rang* $n+1$*. Ce qui montre par récurrence que* $\mathbf{P_n}$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*!"*

1 Dénombrement

Exercice 6 (chemins monotones) *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *on considère le quadrillage constitué par l'ensemble des droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par les points de coordonnées entières. On appelle chemin monotone toute ligne polygonale utilisant les mailles de ce quadrillage, les seuls déplacements autorisés étant les translations de vecteur* $\vec{i}$ *(appelés pas horizontaux) et les translations de vecteur* $\vec{j}$ *(appelés pas verticaux). On part du point* O

1. *Déterminer le nombre de chemins monotones comprenant* n *pas.*
2. *Déterminer le nombre de chemins monotones joignant* O *au point* $A\binom{a}{b}$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$

Exercice 7 *Soit* E *un ensemble fini à* n *éléments. Déterminer les cardinaux de :*

1. $F = \{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \,|\, A \subset B\}$
2. $G = \{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \,|\, A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset\}$
3. $H = \{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \,|\, A \cup B = E\}$

Exercice 8
Pour $n \in \mathbb{N}$*, montrer que :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

1. *En utilisant un calcul de dénombrement*
2. *En développant de deux façons* $(1+x)^{2n}$.