Seconde période

Devoir libre n°2

Exercice I

Combinaisons avec répétition :

Soit $(n,p) \in (N^*)^2$, étant donné un ensemble E à n éléments, on appelle combinaison d'ordre p avec répétition une collection de p objets. Ces objets étant des éléments de E éventuellement répétés, l'ordre d'énumération n'intervenant pas.

on note Γ_n^p le nombre de ces combinaisons.

Montrer que $\Gamma_n^p = \Gamma_{n-1}^p + \Gamma_n^{p-1}$ et puis que $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

Applications :

1. Dénombrer le nombre de résultats possibles lorsqu'on lance a dés indiscernables.
2. Combien a-t-on de façons de placer p boules indiscernables dans n boites ?
3. Montrer que le nombre de suites $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = p$ est Γ_n^p.
   En déduire le nombre de termes dans le développement de $(a_1 + \cdots + a_n)^p$.
4. Déterminer le nombre d'applications croissantes d'une partie E de $\mathbb{R}$ à p éléments dans une partie F de $\mathbb{R}$ à n éléments.
   Déterminer de même le nombre d'applications strictement croissantes de E dans F.

Exercice II

Pour $n \in \mathbb{N}$, Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n telque :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = P_n(\cos\theta)$$

Déterminer le degré de P_n, le cœfficient du terme dominant et les racines de P_n.

Exercice III

Soit n un entier naturel et $(x_i)_{0\le i\le n}$ une suite de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ distincts. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à cœfficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

On considère les $n+1$ polynômes $(L_j)_{0\le j\le n}$ définis par :

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ L_j(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}.$$

1. (a) Pour tout entier $j \in [\![0,n]\!]$, déterminer le degré et les racines de L_j.
   (b) Pour tout entier $j \in [\![0,n]\!]$, calculer $L_j(x_j)$
2. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on considère le polynôme $Q(X) = \sum\limits_{j=0}^{n} P(x_j)L_j(X)$.
   Montrer que $P = Q$
3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant les réels $(x_i)_{0\le i\le n}$. Montrer qu'il existe un unique polynome $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(x_k) = f(x_k)$.